

Школа-конференция "Неголономные дни в Переславле"

26 – 30 августа 2024 г., г. Переславль-Залесский

ПОСТЕРНЫЕ ДОКЛАДЫ



Steklov International Mathematical Center



ТОЧКИ СОВПАДЕНИЯ ДВУХ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ И (q_1, q_2) -КВАЗИМЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

О.А. Васянин

Аннотация. Рассматриваются точки совпадения двух отображений метрических пространств, одно из которых является непрерывным и накрывающим, а другое — липшицевым. Приводятся известные результаты теории точек совпадения. Вводится понятие (q_1, q_2) -квазиметрического пространства и приводятся результаты относительно точек совпадения отображений между пространствами такого типа. Указываются возможные приложения результатов о точках совпадения в математической экономике.

1 Определения и необходимые сведения

Дадим некоторые важные определения.

Пусть X — непустое множество, а функция $\rho : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ такова, что

- $(\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома тождества);
- $\rho(y, x) = \rho(x, y) \quad \forall x, y \in X$ (аксиома симметрии);
- $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$ (неравенство треугольника).

Тогда пара (X, ρ) называется *метрическим пространством*, а функция ρ — *метрикой на нем*.

Если в данном определении опустить аксиому симметрии, а остальные две оставить, то функция ρ называется *квазиметрикой* [1]. Таким образом, для квазиметрики ρ , вообще говоря, $\rho(y, x) \neq \rho(x, y)$. Если же в определении квазиметрики заменить неравенство треугольника на следующее:

$$\rho(x, z) \leq q_1 \rho(x, y) + q_2 \rho(y, z) \quad \forall x, y, z \in X,$$

называемое (q_1, q_2) -*обобщенным неравенством треугольника* (q_1, q_2 — положительные числа), то пара (X, ρ) превращается в (q_1, q_2) -*квазиметрическое пространство* [1]. Заметим, что тем самым всякая метрика является $(1, 1)$ -квазиметрикой, но обратное неверно, поскольку $(1, 1)$ -квазиметрика необязательно симметрична.

Квазиметрические пространства существенно отличаются от метрических (см., например, §2 работы [5]). Так, в полном квазиметрическом пространстве необязательно выполнен принцип сжимающих отображений.

Квазиметрику ρ будем называть *слабо симметрической*, если

$$\left(\lim_{i \rightarrow \infty} \rho(\xi, x_i) = 0\right) \Rightarrow \left(\lim_{i \rightarrow \infty} (x_i, \xi) = 0\right) \quad \forall \{x_i\} \subset X, \forall \xi \in X.$$

Пара (X, ρ) — слабо симметрическое квазиметрическое пространство.

Пример 1. Возьмем вещественные числа $a < b < c$ и рассмотрим на прямой \mathbb{R} множество $X = \{a\} \cup [b, c]$. Определим на $X \times X$ неотрицательную функцию ρ_X так:

$$\begin{aligned}\rho_X(a, b) = \rho_X(b, a) = 1, \quad \rho(a, x) = \rho_X(x, a) = 3 \quad \forall x \in (b, c], \\ \rho_X(x_1, x_2) = |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [b, c].\end{aligned}$$

Функция ρ_X является симметрической (3,3)-квазиметрикой. Рассмотрим открытый шар $O^X(a, 2) = \{y \in X \mid \rho_X(y, a) < 2\}$. Это множество не является открытым: действительно, точка $b \in O^X(a, 2)$ для него не является внутренней. Для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$ верно, что $x_\varepsilon = b + \frac{\varepsilon}{2} \in (b, c]$, но $x_\varepsilon \notin O^X(a, 2)$, поскольку $\rho_X(x_\varepsilon, a) = 3$. Тем самым, в квазиметрическом пространстве открытый шар может и не быть открытым множеством!

Существуют различные примеры квазиметрических пространств, в которых последовательности точек имеют континуальное множество пределов [1].

Пример 2. (Прямая Зоргенфрея). Рассмотрим на прямой \mathbb{R} квазиметрику ρ , определенную так:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} y - x, & y \geq x, \\ 1, & y < x. \end{cases}$$

Тогда в квазиметрическом пространстве (\mathbb{R}, ρ) последовательность $x_n = -\frac{1}{n}$ является последовательностью Коши (то есть для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при $m, n \geq N$ верно $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$), однако не имеет предела. То есть пространство (\mathbb{R}, ρ) не полно. С другой стороны, последовательность $y_n = \frac{1}{n}$ имеет единственный предел $y = 0$, поскольку $\rho(0, y_n) = \frac{1}{n}$, однако $\{y_n\}$ не является последовательностью Коши. Пример показывает, что в квазиметрических пространствах сходимость последовательностей, вообще говоря, не следует из их полноты, а полнота, вообще говоря, не следует из сходимости.

Пусть X и Y — метрические пространства, а $\Phi : X \rightarrow Y$ и $\Psi : X \rightarrow Y$ — произвольные отображения. Точка $\xi \in X$, для которой выполнено равенство

$$\Phi(\xi) = \Psi(\xi),$$

называется *точкой совпадения отображений* Φ и Ψ .

В силу исторической традиции, изучаются точки совпадения пары отображений определенного вида, а именно, накрывающего и липшицева отображений [2].

Пусть $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, а число $\alpha > 0$.

Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется α -накрывающим, если выполнено включение

$$B^Y(\Psi(x), r) \subset \Psi(B^X(x, r)) \quad \forall x \in X, \forall r > 0.$$

Здесь $B^X(x, r) = \{y \in X \mid \rho_X(y, x) \leq r\}$ — замкнутый шар в X .

Пусть $X = (X, \rho_X)$ и $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, а число $\beta > 0$. Отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ называется β -липшицевым, если

$$\rho_Y(\Psi(x_1), \Psi(x_2)) \leq \beta \rho_X(x_1, x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in X.$$

2 Результаты о точках совпадения

В этом разделе приведем результаты о точках совпадения двух отображений в метрических и квазиметрических пространствах.

Теорема 1 (О возмущении) (А.А. Милютин) [2]. Пусть X является метрическим пространством, а Y является векторным пространством. Пусть отображения $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$ таковы, что Ψ является непрерывным и α -накрывающим, а Φ является β -липшицевым, причем $\alpha > \beta \geq 0$. Тогда отображения $\Psi \pm \Phi$ являются $(\alpha - \beta)$ -накрывающими.

Заметим, что из Теоремы 1 следует, что существует точка совпадения Φ и Ψ , поскольку всякое накрывающее отображение является сюръективным. Такая точка $\xi \in X$, для которой $(\Psi - \Phi)(\xi) = 0$, и будет искомой точкой.

Теорема 2 (А.В. Арутюнов) [3]. Пусть $X = (X, \rho_X)$, $Y = (Y, \rho_Y)$ — метрические пространства, причем пространство X является полным. Пусть отображения $\Phi, \Psi : X \rightarrow Y$ таковы, что Ψ является непрерывным и α -накрывающим, а Φ является β -липшицевым, причем $\alpha > \beta \geq 0$. Тогда для любой точки $x \in X$ существует такая точка совпадения ξ отображений Φ и Ψ , что выполнена оценка

$$\rho_X(\xi, x) \leq \frac{\rho_Y(\Phi(x), \Psi(x))}{\alpha - \beta}.$$

Эта теорема обобщает Теорему 1, ведь теперь пространство Y — произвольное метрическое. Факт накрывания для отображения $\Psi - \Phi$ с константой $\alpha - \beta$ следует из оценки расстояния до точки совпадения и рассмотрения вспомогательного отображения [3].

Теорема 3 (О.А. Васянин) [4]. Пусть $X = (X, \rho_X)$ является метрическим и одновременно линейно связным топологическим пространством, а пространство $Y = \mathbb{R}$. Пусть отобра-

жение $\Phi : X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию

$$\rho_Y(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq \gamma(\rho_X(x_1, x_2)),$$

где неубывающая функция $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ такова, что $\gamma(t) < t$ при $t > 0$, а отображение $\Psi : X \rightarrow Y$ является непрерывным 1-накрывающим. Тогда существует точка совпадения отображений Φ и Ψ .

Эта теорема гласит о существовании точки совпадения двух непрерывных функционалов, обладающих свойствами накрывания и липшицевости. В частном случае, когда пространство X конечномерно, — считаем без потери общности, что $X = \mathbb{R}^n$, — множество точек совпадения состоит из одного элемента при $n = 1$ и имеет мощность континуума при $n \geq 2$.

Для формулировки следующей теоремы нам понадобятся дополнительные определения.

Для функции $f : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ и точки $(x_1, x_2) \in X \times X$ введем *нижний предел функции по второй переменной*:

$$\underline{\lim}_{\eta \rightarrow x_2} \rho_X(x_1, \eta) = \inf_{\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}} \underline{\lim}_{i \rightarrow \infty} f(x_1, \eta_i).$$

Здесь инфимум в правой части берется по всем последовательностям $\{\eta_i\} \subset X$ таким, что $\eta_i \rightarrow x_2$. В силу неотрицательности F нижний предел существует и конечен.

Для отображения $F : X \rightarrow Y$ введем его *график*, то есть множество

$$\text{grh } F = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = F(x)\}.$$

Будем говорить, что отображение F *замкнуто*, если для любых последовательностей $\{x_i\} \subset X$ и $\{y_i\} \subset Y$ таких, что $x_i \rightarrow x_0 \in X$, $y_i \rightarrow y_0 \in Y$, $(x_i, y_i) \in \text{grh } F \quad \forall i$ верно, что $(x_0, y_0) \in \text{grh } F$.

Обозначим для чисел $n \in \mathbb{N}$ и $\theta \in [0, 1)$ сумму первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем θ : $1 + \theta + \dots + \theta^{n-1} = S(\theta, n) = \frac{1 - \theta^n}{1 - \theta}$. Удобно положить $S(\theta, 0) = 0$.

Теорема 4 (А.В. Арутюнов, А.В. Грешнов) [5]. Пусть (q_1, q_2) -квазиметрическое пространство (X, ρ_X) является полным. Пусть отображение Ψ является α -накрывающим и замкнутым, а отображение Φ является β -липшицевым. Зафиксируем точку $x_0 \in X$. Тогда существует точка совпадения ξ отображений Φ и Ψ такая, что

$$\underline{\lim}_{\eta \rightarrow \xi} \rho_X(x_0, \eta) \leq \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S\left(\frac{q_2 \beta}{\alpha}, m_0 - 1\right) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Если пространство (X, ρ_X) является слабо симметрическим, то для ξ также выполнена оценка

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq q_1 \frac{q_1^2 \alpha^{m_0-1} S\left(\frac{q_2 \beta}{\alpha}, m_0 - 1\right) + q_1 (q_2 \beta)^{m_0-1}}{\alpha^{m_0} - q_2 \beta^{m_0}} \rho_Y(\Psi(x_0), \Phi(x_0)).$$

Здесь число $m_0 = \min\{j \in \mathbb{N} \mid q_2 \beta^j < \alpha^j\}$.

3 Прикладное значение

Сами по себе квазиметрические пространства активно изучаются в топологии, функциональном и метрическом анализе [6] и имеют приложения в выпуклом анализе и теории оптимизации. Теория точек совпадения (результаты о существовании точек совпадения, мощности их множества и устойчивости к возмущениям отображений) нашла приложения в математической экономике: в модели "спрос-предложение" точка совпадения пары отображений (спроса и предложения), определенных на специальном подмножестве в \mathbb{R}^n , оказывается вектором равновесных цен [7]. Экономическая же интерпретация квазиметрических пространств автору пока неизвестна.

Список литературы

- [1] Wilson, W. A. (1931). On Quasi-Metric Spaces. American Journal of Mathematics, 53(3), 675–684
- [2] *Дмитрук А.В., Милютин А.А., Осмоловский Н.П.* Теорема Люстерника и теория экстремума // УМН. 1980. Т. 35, № 6 (216). С. 11–46.
- [3] *Арутюнов А.В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 2. С. 151–155.
- [4] *Васянин О.А.* Точки совпадения и задачи управления // Труды 14-го Всероссийского совещания по проблемам управления (ВСПУ XIV, Москва, 2024). М.: ИПУ РАН, 2024.
- [5] *Арутюнов А.В., Грешнов А.В.* (Q-1, Q-2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points // Izvestiya Mathematics. 2018. Vol. 82, Iss. 2. С. 245–272.
- [6] *Александров П.С., Немыцкий В.В.* Условие метризуемости топологических пространств и аксиома симметрии // Матем. сб., 3(45):3 (1938), 663–672.
- [7] *Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А.* Равновесные цены в одной модели экономического равновесия // Матем. моделирование. 2016. Т. 28, № 3. С. 3–22.

ЛОРЕНЦЕВА ЗАДАЧА НА ГРУППЕ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Рассмотрены две левоинвариантные лоренцевы задачи на группе Гейзенберга. К обеим задачам применен принцип максимума Понтрягина, получена параметризация аномальных и нормальных экстремальных траекторий. Исследованы множества достижимости и существование оптимальных траекторий.

1. Группа Гейзенберга

Группа Гейзенберга есть пространство $G \simeq \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$ с базисом левоинвариантных векторных полей

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad X_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

2. Первая задача

2.1. Постановка задачи

Сформулируем первую задачу Лоренца на группе Гейзенберга:

$$(2.1) \quad \dot{q} = \sum_{i=1}^3 u_i X_i, \quad q = (x, y, z) \in G,$$

$$(2.2) \quad u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 \leq 0, u_3 \geq 0\},$$

$$(2.3) \quad q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$(2.4) \quad J(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2} dt \rightarrow \max.$$

Рассмотрим следующую систему управления:

$$(2.5) \quad \begin{cases} \dot{x} = u_1, \\ \dot{y} = u_2, \\ \dot{z} = -\frac{y}{2}u_1 + \frac{x}{2}u_2 + u_3, \end{cases}$$

Для траектории $\gamma(t)$, соответствующей управлению $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ за время $t_1 > 0$, определим функционал стоимости:

$$(2.6) \quad J(\gamma) = \int_0^T \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2} dt.$$

Для заданных граничных условий:

$$(2.7) \quad \gamma(0) = (x_0, y_0, z_0) = 0, \quad \gamma(t_1) = q_1 = (x_1, y_1, z_1).$$

Запишем общий вид функции Понтрягина

$$h_u^\nu = \langle p, \sum_{i=1}^3 u_i X_i \rangle + \nu \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}, \quad p \in T^*M, \quad \nu \leq 0.$$

Пусть $(u(t), q(t))$, $t \in [0, T]$, будет оптимальным, то выполняются следующие условия:

- 1) Гамильтонова система $\dot{p} = -\frac{\partial h_u^\nu}{\partial q}$, $\dot{q} = \frac{\partial h_u^\nu}{\partial p}$;
- 2) Условие максимума $h_{u(t)}^\nu(p(t), q(t)) = \max_{u \in \mathbb{R}^3} h_u^\nu(p(t), q(t))$;
- 3) Условие нетривиальности $(p(t), \nu) \neq (0, 0) \forall t \in [0, T]$.

Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Тогда функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 - \nu \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}.$$

В формулировке ПМП, не ограничивая общности, достаточно рассмотреть два случая: $\nu = 0$ — аномальный случай и $\nu = -1$ — нормальный случай. Рассмотрим их подробно.

2.2. Аномальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = 0$)

h_i - наперед заданные константы. Опишем пространство h_i , разделив его на 4 подпространства.

$$1) h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 \leq 0, \quad h_3 \geq 0.$$

Запишем ограничения для случая 1

$$\begin{cases} u_3^2 \geq u_1^2 + u_2^2, \\ h_3^2 \geq h_1^2 + h_2^2, \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие неравенства

$$\begin{aligned} u_3^2 h_3^2 &\geq u_1^2 h_1^2 + h_2^2 u_2^2 + u_1^2 h_2^2 + u_2^2 h_1^2, \\ u_1^2 h_1^2 + h_2^2 u_2^2 + u_1^2 h_2^2 + u_2^2 h_1^2 - (u_1 h_1 + u_2 h_2)^2 &= (u_1 h_2 - u_2 h_1)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$|u_3 h_3| \geq |u_1 h_1| + |u_2 h_2|.$$

Исследуем $u_3 h_3$. Если $h_3 > 0$, в совокупности с неограниченностью u_3 , то и $u_3 h_3$ неограниченна.

$u_3 = 0$ означает и $u_1 = u_2 = 0$.

Максимум функции h_u^0 либо не существует, либо решение тривиально.

$$2) h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 < 0, h_3 < 0.$$

Почти аналогично 1 случаю.

$$\begin{cases} u_3^2 \geq u_1^2 + u_2^2, \\ h_3^2 \geq h_1^2 + h_2^2, \end{cases}$$

Только из-за строгого равенства $h_u^0 \neq 0$. То есть в любом случае функция отрицательна. Максимум нет.

$$3) h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 > 0.$$

При $u = k(h_1, h_2, \sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ получаем $h_u = k\sqrt{h_1^2 + h_2^2}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} + h_3) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

$$4) h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 0, h_3 < 0.$$

$u_3^2 = u_1^2 + u_2^2$. Выбираем натуральную параметризацию $u_1^2 + u_2^2 = 1$. Максимум функции $h_u^0 = h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 = 0$, когда она равна 0.

$$\begin{cases} x = \sin(t - \theta_0) + \sin(\theta_0), \\ y = \cos(t - \theta_0) - \cos(\theta_0), \\ z = \sin(t)/2 + t/2. \end{cases}$$

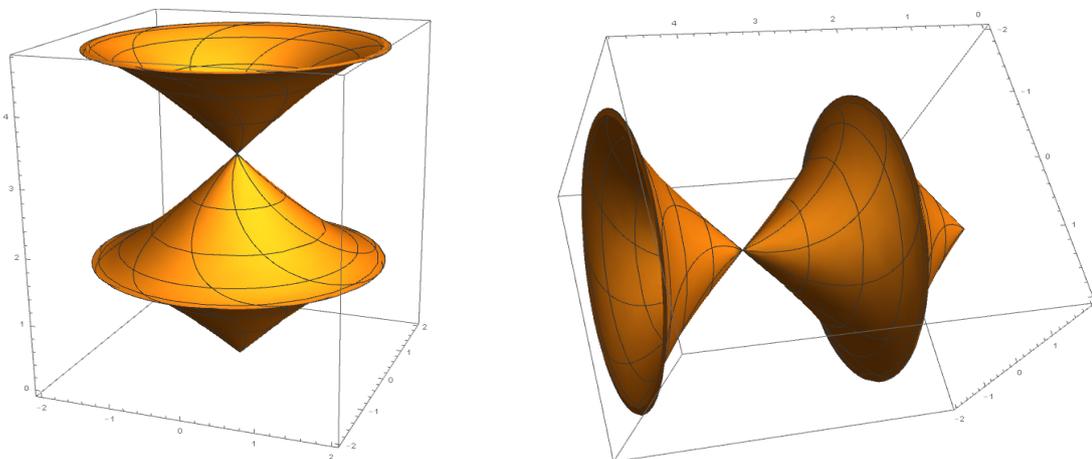


Рис. 1. График динамики системы при $\theta_0 \in [-2\pi, 2\pi], t \in [0, 10]$.

2.3. Нормальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = -1$)

Функция Понтрягина для нормального случая

$$h_u = h_u^{-1} = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 + \sqrt{u_3^2 - u_1^2 - u_2^2}.$$

Рассмотрим несколько вариантов

1) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 \leq 0, h_3 \geq 0.$

Если выбрать $(u_1, u_2, u_3) = k(h_1, h_2, h_3)$, то

$$h_u^{-1} \rightarrow +\infty, \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Поэтому в случае 1) максимума не существует.

2) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 > 0.$

При $u = k(h_1, h_2, \sqrt{h_1^2 + h_2^2})$ получаем $h_u = k\sqrt{h_1^2 + h_2^2}(\sqrt{h_1^2 + h_2^2} + h_3) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty.$

Поэтому в случае 2) максимума не существует.

3) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 0, h_3 < 0.$

Положим

$$\begin{aligned} u_3 &= \rho \cosh \alpha, & u_1 &= \rho \sinh \alpha \cos \beta, & u_2 &= \rho \sinh \alpha \sin \beta, \\ h_3 &= -R, & h_1 &= R \cos b, & h_2 &= R \sin b. \end{aligned}$$

Тогда $h_u = \rho(R(\sinh \alpha \cos(\beta - b) - \cosh \alpha) + 1) \rightarrow +\infty$ при $\beta = b, \alpha \rightarrow +\infty, \rho \rightarrow +\infty.$

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

4) $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 < 0, h_3 < 0.$

Положим

$$\begin{aligned} u_3 &= \rho \cosh \alpha, & u_1 &= \rho \sinh \alpha \cos \beta, & u_2 &= \rho \sinh \alpha \sin \beta, \\ h_3 &= -R \cosh a, & h_1 &= R \sinh a \cos b, & h_2 &= R \sinh a \sin b. \end{aligned}$$

Тогда $h_u = \rho(R(\sinh \alpha \sinh a \cos(\beta - b) - \cosh \alpha \cosh a) + 1).$

Если $R < 1$, то $h_u \rightarrow +\infty$ при $\beta = b, \alpha = a, \rho \rightarrow +\infty, h_u = \rho(1 - R).$

Если $R > 1$, то $\max h_u = 0$ при $\rho = 0.$

Если $R = 1$, то $\max h_u = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2} + 1$ при $(u_1, u_2, u_3) = (h_1, h_2, -h_3)/\sqrt{h_1^2 + h_2^2 - h_3^2}.$ Без ограничений общности задаем, что $h_1^2 + h_2^2 - h_3^2 = 1.$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x = -\operatorname{th} a \sin(\theta_0 - t \cosh a) + \operatorname{th} a \sin \theta_0, \\ y = \operatorname{th} a \cos(\theta_0 - t \cosh a) - \operatorname{th} a \cos \theta_0, \\ z = t/(2 \cosh a) + t \cosh a/2 + \operatorname{th}^2 a \sin(t \cosh a)/2. \end{cases}$$

3. Вторая задача

Сформулируем вторую задачу Лоренца на группе Гейзенберга:

$$(3.1) \quad \dot{q} = \sum_{i=1}^3 u_i X_i, \quad q = (x, y, z) \in G,$$

$$(3.2) \quad u \in U = \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \mid -u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 0, u_1 \geq 0\},$$

$$(3.3) \quad q(0) = q_0 = (0, 0, 0), \quad q(t_1) = q_1,$$

$$(3.4) \quad J(\gamma) = \int_0^{t_1} \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2} dt \rightarrow \max.$$

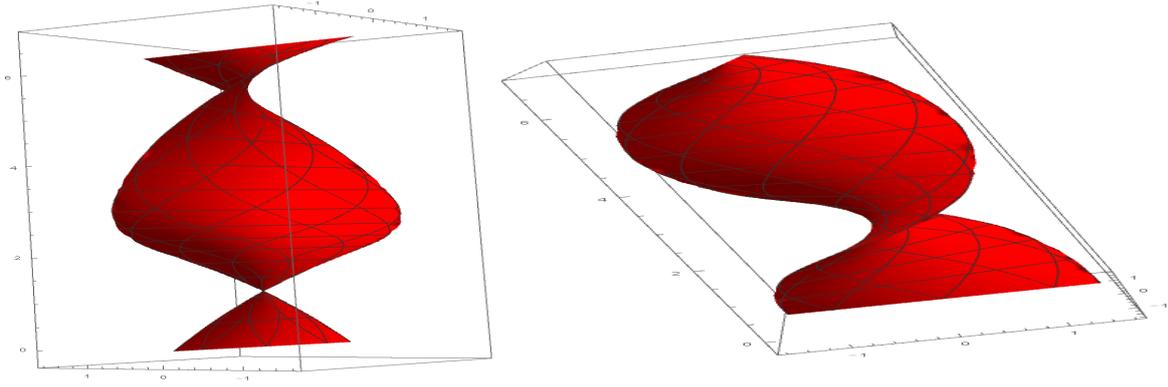


Рис. 2. График динамики системы при $a = 1, \theta_0 \in [-2\pi, 2\pi], t \in [0, 6]$.

Ничего не изменится сравнительно с предыдущим случаем, кроме
 Обозначим $h_i = \langle p, X_i \rangle$. Тогда функция Понтрягина выражается следующим образом:

$$h_u^\nu = u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3 - \nu \sqrt{u_1^2 - u_2^2 - u_3^2}.$$

3.1. Аномальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = 0$)

Аналогично первой задаче 1) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 \leq 0, h_1 \geq 0$.

Запишем ограничения для случая 1

$$\begin{cases} u_1^2 \geq u_2^2 + u_3^2, \\ h_1^2 \geq h_2^2 + h_3^2, \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие неравенства

$$u_1^2 h_1^2 \geq u_2^2 h_2^2 + h_3^2 u_3^2 + u_2^2 h_3^2 + u_3^2 h_2^2,$$

$$u_2^2 h_2^2 + h_3^2 u_3^2 + u_2^2 h_3^2 + u_3^2 h_2^2 - (u_2 h_2 + u_3 h_3)^2 = (u_2 h_3 - u_3 h_2)^2 \geq 0.$$

Откуда следует, что

$$|u_1 h_1| \geq |u_2 h_2| + |u_3 h_3|.$$

Исследуем $u_1 h_1$. Если $h_1 > 0$, в совокупности с неограниченностью u_1 , то и $u_1 h_1$ неограниченна.

$u_1 = 0$ означает и $u_2 = u_3 = 0$.

Максимум функции h_u^0 либо не существует, либо решение тривиально.

2) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 < 0, h_1 < 0$.

Почти аналогично 1 случаю.

$$\begin{cases} u_1^2 \geq u_2^2 + u_3^2, \\ h_1^2 \geq h_2^2 + h_3^2, \end{cases}$$

Только из-за строгого равенства $h_u^0 \neq 0$. То есть в любом случае функция отрицательна. Максимум нет.

3) $h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 > 0$.

При $u = k(\sqrt{h_2^2 + h_3^2}, h_2, h_3)$ получаем $h_u = k\sqrt{h_2^2 + h_3^2}(\sqrt{h_2^2 + h_3^2} + h_1) \rightarrow +\infty$ при

$k \rightarrow +\infty$.

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

$$4) h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 = 0, h_1 < 0.$$

$$u_1^2 = u_2^2 + u_3^2.$$

Максимум функции $h_u^0 = h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 = 0$, когда она равна 0.

$$h_1^2 = h_2^2 + h_3^2, h_1 = -\sqrt{h_2^2 + h_3^2}.$$

$$h_2 u_2 + h_3 u_3 - \sqrt{h_2^2 + h_3^2} \sqrt{u_2^2 + u_3^2} = 0.$$

В случае $h_3 = 0$, что $x = t, y = \pm t, z = 0$.

$h_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} x = \pm \sinh(C_1 \pm t) \mp \sinh C_1, \\ y = \pm \cosh(C_1 \pm t) \mp \cosh C_1, \\ z = \pm \sinh t/2 \pm t/2, \end{cases}$$

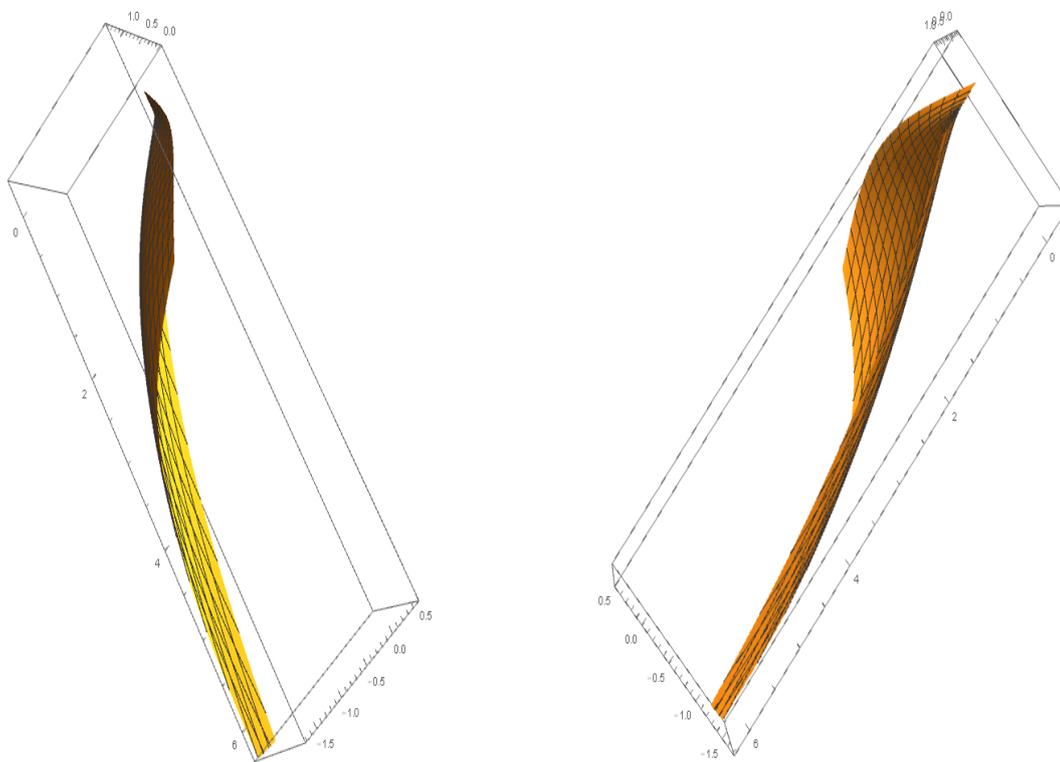


Рис. 3. График динамики системы при выбранных верхних знаках и $C_1 \in [-1, 1], t \in [0, 2]$.

3.2. Нормальный случай принципа максимума Понтрягина ($\nu = -1$)

Рассмотрим несколько вариантов

$$1) h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 \leq 0, h_1 \geq 0.$$

Если выбрать $(u_1, u_2, u_3) = k(h_1, h_2, h_3)$, то

$$h_u^{-1} \rightarrow +\infty, \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Поэтому в случае 1) максимума не существует.

$$2) h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 > 0.$$

При $u = k(\sqrt{h_2^2 + h_3^2}, h_2, h_3)$ получаем $h_u = k\sqrt{h_2^2 + h_3^2}(h_1 + \sqrt{h_2^2 + h_3^2}) \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$.

Поэтому в случае 2) максимума не существует.

$$3) h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 = 0, h_1 < 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho \cosh \alpha, & u_2 &= -\rho \sinh \alpha \cos \beta, & u_3 &= -\rho \sinh \alpha \sin \beta, \\ h_1 &= -R \cosh b, & h_2 &= -R \sinh b, & h_3 &= -R. \end{aligned}$$

Тогда $h_u = \rho(R(-\cosh \alpha \cosh b + \sinh \alpha \sinh b \cos \beta + \sinh \alpha \sin \beta) + 1) \rightarrow +\infty$ при $b = 0$, $b \rightarrow +\infty$, $\alpha \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow +\infty$.

Поэтому в случае 3) максимума не существует.

$$4) h_2^2 + h_3^2 - h_1^2 < 0, h_1 < 0.$$

Положим

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho \cosh \alpha, & u_2 &= \rho \sinh \alpha \cos \beta, & u_3 &= \rho \sinh \alpha \sin \beta, \\ h_1 &= -R \cosh b, & h_2 &= R \sinh b, & h_3 &= R. \end{aligned}$$

Тогда $h_u = \rho(R(-\cosh \alpha \cosh b + \sinh \alpha \sinh b \cos \beta + \sinh \alpha \sin \beta) + 1) \rightarrow +\infty$ при $b = 0$, $b \rightarrow +\infty$, $\alpha \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow +\infty$.

Если $R < 1$, то $h_u \rightarrow +\infty$ при $\beta = 0$, $b = \alpha$, $h_u = \rho(1 - R)$. $\rho \rightarrow +\infty$.

Если $R > 1$, то $\max h_u = 0$ при $\rho = 0$.

Если $R = 1$, то $\max h_u = \sqrt{h_2^2 + h_3^2 - h_1^2} + 1$ при $(u_1, u_2, u_3) = (-h_1, h_2, h_3)/\sqrt{h_2^2 + h_3^2 - h_1^2}$. Рассмотрим случай $h_3 = 0$

$$\begin{cases} x = (\sqrt{c^2 - 1})t, \\ y = ct, \\ z = 0. \end{cases}$$

где $c = \text{const} > 1$.

Случай $h_3 \neq 0$

$$\begin{cases} x = C_1 \exp(-h_3 t)/h_3 - C_2 \exp(h_3 t)/h_3 - C_1/h_3 + C_2/h_3, \\ y = -C_1 \exp(-h_3 t)/h_3 - C_2 \exp(h_3 t)/h_3 + C_1/h_3 + C_2/h_3, \\ z = h_3 t + C_1^2 \exp(-h_3 t)/h_3^2 - C_2^2 \exp(h_3 t)/h_3^2 - C_1^2/h_3^2 + C_2^2/h_3^2. \end{cases}$$

Теорема 1. Множество достижимости системы 3.1, 3.2 из точки q_0 за произвольное неотрицательное время есть

$$(3.5) \quad \mathcal{A}_{q_0} = \{(x, y, z) \in M | 0 < |z| \leq (t + \sinh t)/2, t = \text{arcosh}(x^2 - y^2)/2 + 1\} \cup \{(x, y, z) \in M | x \geq |y|, z = 0\}.$$

Доказательство. Следует из теоремы Адамара о глобальном диффеоморфизме [3].

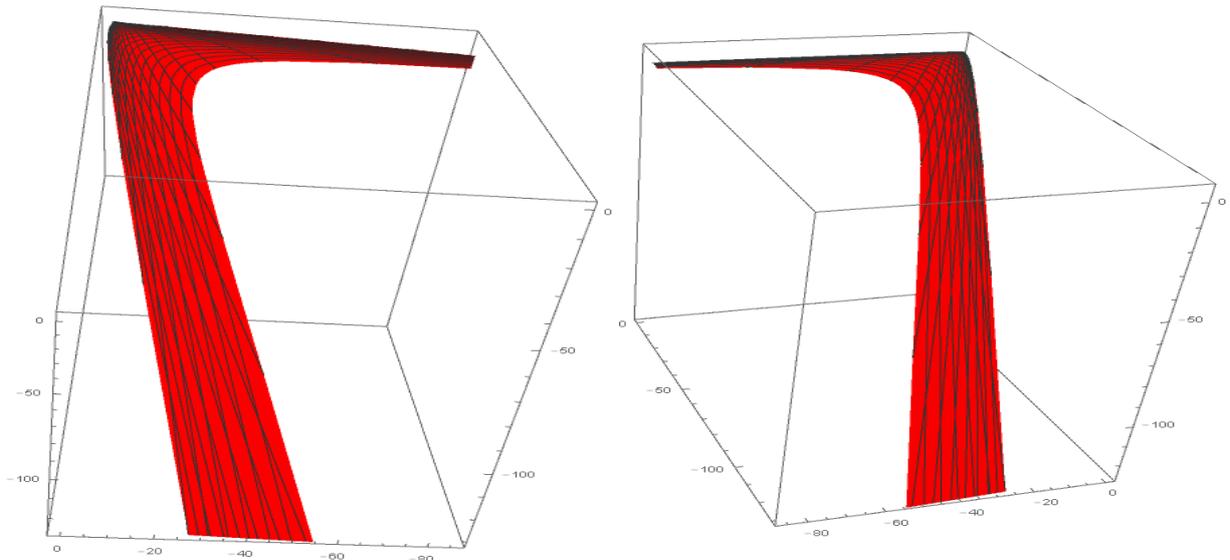


Рис. 4. График динамики системы при $C_1 = 2, C_2 = 1/2, h_3 \in [0.1, 2], t \in [0, 5]$.

Теорема 2. Для любых точек $q_0 \in M, q_1 \in A_{q_0}$ существует лоренцева длиннейшая, их соединяющая.

Доказательство. Следует из теоремы о существовании лоренцевых длиннейших в глобально гиперболических лоренцевых многообразиях [4].

4. Заключение

В представленном докладе исследованы две левоинвариантные лоренцевы задачи на группе Гейзенберга. Обе задачи решались с помощью принципа максимума Понтрягина. Для аномальных и нормальных экстремальных траекторий получена явная параметризация. Найдены множества достижимости системы, а так же доказано существование лоренцевых длиннейших.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зеликин М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление, М.: СССР, 2014.
2. Сачков Ю.Л. Введение в геометрическую теорию управления, М.: ЛЕНАНД, 2021, 160 С.
3. Beem J.K., Ehrlich P.E. Easley K.I. Global Lorentian Geometry. Monographs Textbooks Pure Appl. Math. 202, Marcel Dekker Inc. 1996.
4. Krantz S.G., Parks H.R. The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications, Birkhauser, 2001.

Введение

Обработка различных сигналов сегодня является очень важной прикладной задачей. Часто при передаче сигналов возникают помехи, избавиться от которых помогают фильтры. В зависимости от конкретной проблемы – их физическая реализация может быть различной (аналоговая, цифровая, микроволновая), однако оптимизационная задача схожая:

Задача 1. Дана совокупность E непересекающихся отрезков действительной оси, имеющих смысл частотных диапазонов. Эти отрезки разделены на две группы: полосы задержки E^- и полосы пропускания E^+ . Индикаторную функцию определим равенством $F(x) = \pm 1$ при $x \in E^\pm$. Требуется среди вещественных рациональных функций $R(x)$ заданной степени n найти наилучшее приближение индикаторной функции в равномерной метрике на указанных отрезках: $\|R - F\|_E := \max_{x \in E} |R(x) - F(x)| \rightarrow \min$. Известно, что для функции $R(x)$, которая является решением задачи 1, функция $R(x) - F(x)$ принимает значения из $\{1 \pm \|R - F\|_E, -1 \pm \|R - F\|_E\}$ на множестве E ровно $2n + 2$ раза. С помощью дробно-линейного отображения можно перевести множество $\{1 \pm \|R - F\|_E, -1 \pm \|R - F\|_E\}$ в множество $\mathbf{Q} := \mathbf{Q}(\kappa) := \{\pm 1, \pm 1/\kappa\}$. Поэтому достаточно найти такую рациональную функцию $R(x)$, что $R(x) - F(x)$ принимает на множестве E ровно $2n + 2$ раза значение из \mathbf{Q} . Такую задачу мы обозначим как задачу 1'. Размерность пространства рациональных функций равна $2n + 2$. В данном докладе мы расскажем про анзац метод, который позволяет дать явную аналитическую формулу решения задачи 1' и заметно понизит размерность пространства возможных решений.

Введение

Около 50 лет назад при построении n -стадийных явных устойчивых методов Рунге-Кутты p -го порядка точности и была поставлена оптимизационная задача о наилучшем многочлене устойчивости. Решение данной задачи известно как наилучший многочлен устойчивости. При $p = 1$ этот многочлен выражается через классические многочлены Чебышева: $R_n(x) = T_n(1 + x/n^2)$. Многочлены Золотарева, представимые параметрически через эллиптические функции, дают решение задачи при $p = 2$. Многие авторы отмечают, что при $p > 2$ решение $R_n(x)$ в замкнутой аналитической форме неизвестно, и предлагают различные итерационные методы для его численного определения. Прямая численная оптимизация оказывается очень трудоемкой и практически невозможной при больших степенях многочлена. Специально для решения оптимизационной задачи о наилучшем многочлене устойчивости был разработан итерационный метод [Le93]. Данный метод потребовал при $p = 3$ четырех суток вычислений на многопроцессорной рабочей станции для решения задачи с $n = 576$. Дать явную аналитическую формулу решения тем не менее можно и для случая $p > 2$.

Решение упомянутой выше задачи для $n = 576$ с помощью алгоритма, основанного на анзац методе, теперь занимает лишь пару секунд машинного времени на персональном компьютере.

Ссылки

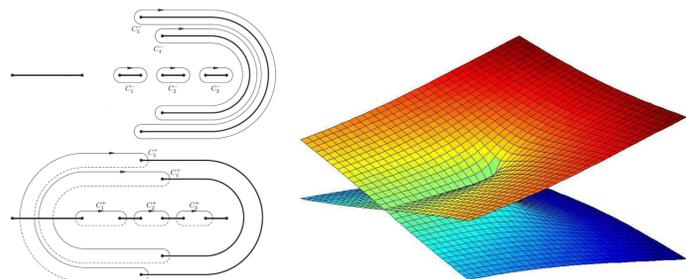
Список литературы

[Le93] Lebedev V.I. A new method for determining the roots of polynomials of least deviation on a segment with weight and subject to additional conditions. Part I, Part II // Russ. J. of Numer. Anal. and Mathem. Modelling., 8:3 (1993), 195–222; 8:5 (1993), 397–426.

[Bo10] A.B. Bogatyrev, Chebyshev representation for rational functions, Sb. Math., 201:11 (2010), pp. 1579–1598.

[Ah29] Н.И. Ахиезер, Об одной задаче Е.И. Золотарева, Изв. Акад. наук СССР, VII серия, 1929, №10, стр. 919–931

Гиперэллиптическая кривая



Чебышевское представление

Для рациональной функции $R(x)$, представленной в виде несократимой дроби степени n , справедливо равенство

$$(R^2(x) - 1)(\kappa^2 R^2(x) - 1) =: W(x)S^2(x), \quad (1)$$

где $S(x)$ – рациональная функция, знаменатель которой равен квадрату знаменателя $R(x)$, и где $W(x)$ – свободный от квадратов многочлен.

Нетрудно заметить, что все корни производной функции $R(x)$ будут нулями функции $S(x)$. Поэтому для некоторого многочлена $\rho(x)$ справедливо равенство

$$R'(x) = \rho(x)S(x).$$

Теперь уравнение (1) можно переписать в дифференциальном виде:

$$\frac{dR(x)}{\sqrt{(R^2(x) - 1)(\kappa^2 R^2(x) - 1)}} = \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}.$$

Решение уравнения выше имеет вид

$$R(x) = sn\left(\int_e^x \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}\right). \quad (2)$$

Представление функции $R(x)$ в виде равенства (2) называют чебышевским представлением. Верхняя оценка на степень многочленов $\rho(x)$ и $W(x)$ не зависит от n , но зависит от числа полос пропускания и задержки, см 1. Поэтому при большом n и при маленьком числе полос пропускания и задержки уравнение (2) позволяет искать оптимальное решение задачи 1' в пространстве низкой размерности.

Степень $W(x)$

Теорема 1. Степень многочлена $W(x)$ четная и не превосходит $2m - 4$ при $m \geq 2$, где m – число полос пропускания и задержки. Степень многочлена $\rho(x)$ меньше или равна $\frac{\deg W(x)}{2} - 1$.

Доказательство. Четность степени многочлена $W(x)$ легко следует из равенства (1). В данном абзаце мы покажем, что степень многочлена $W(x)$ не превосходит $2m - 4$. Из теоремы об альтернансе, см [Ah29], следует, что на E имеется $2n + 2$ точки экстремальные точки, в которых R принимает значения из \mathbf{Q} . Экстремальные точки, которые лежат во внутренней E , являются нулями производной $R(x)$. Экстремальные точки $R(x)$ на границе E могут не обнулять производную функции $R(x)$. Поэтому число точек из E , где $R'(x) = 0$, не меньше $2n + 2 - |\partial E| = 2n + 2 - 2m$. Следовательно, степень числителя $S^2(x)$ не меньше $2n + 2 - 2m$, а степень $W(x)$ не больше $2m - 4$. Неравенство $\deg \rho(x) \leq \frac{\deg W(x)}{2} - 1$ выводится из равенства

$$R'(x) = \rho(x)S(x)$$

и из оценки на асимптотику на бесконечности $R(x)$ и $S(x)$. □

Чебышевское соответствие

Функции $R(x)$, $S(x)$ и $W(x)$ определены в разделе Чебышевское представление. Если подставить произвольные многочлены $\rho(x)$ и $W(x)$ в равенство (2), то, вообще говоря, функция $sn\left(\int_e^x \frac{\rho(x)dx}{\sqrt{W(x)}}\right)$ не обязана быть рациональной. Написать необходимые условия, многочлены $\rho(x)$ и $W(x)$, чтобы в правой части равенства 2 получилась рациональная функция – непросто. Для этого нам потребуется воспользоваться римановыми поверхностями.

Каждой рациональной функции $R(x)$ сопоставим риманову поверхность $X = M(e)$ с ветвлениями в точках множества e , в которых функция принимает значения из множества \mathbf{Q} с четной кратностью, см рис. Аффинная часть данной кривой задается уравнением

$$w^2 = W(x), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2.$$

Такие кривые, где многочлен $W(x)$ не имеет кратных корней, называются гиперэллиптическими.

Замечание 2. а) Точки множества e в точности являются нулями многочлена $W(x)$.

б) Род кривой X равен

$$g := 1 + \sum_{x:R(x) \notin \mathbf{Q}} \text{ord } dR(x) + \sum_{x:R(x) \in \mathbf{Q}} \left[\frac{1}{2} \text{ord } dR(x)\right],$$

а степень многочлена $W(x)$ равна $2g + 2$.

Не каждая поверхность Римана соответствует рациональной функции.

Образ чебышевского соответствие

Теорема 3. Гиперэллиптическая кривая M является образом рациональной функции при чебышевском соответствии тогда и только тогда, когда она (возможно с ветвлениями) голоморфно покрывает тор $T(\mathbf{Q})$, аффинную часть которого задает уравнение

$$s^2 = (r^2 - 1)(\kappa^2 r^2 - 1), \quad (r, s) \in \mathbb{C}^2.$$

Набросок доказательства. Если кривая M получена в результате применения чебышевской конструкции к рациональной функции R , то накрытие тора задается рациональным отображением

$$M \ni (x, w) \xrightarrow{\tilde{R}} (R(x), wS(x)) = (r, s) \in T(\mathbf{Q}).$$

Ниже мы приведем набросок доказательства утверждения в другую сторону. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\tilde{R}} & T(\mathbf{Q}) \\ p_{rM} \downarrow & & \downarrow p_{rT(\mathbf{Q})} \\ \mathbb{C}P^1 & \xrightarrow{R} & \mathbb{C}P^1 \end{array}$$

где $p_{rM}(x, w) := x$, $p_{rT(\mathbf{Q})}(x, w) = x$ и где \tilde{R} – голоморфное накрытие поверхностей. Для каждой гиперэллиптической кривой

$$M' : w^2 = f(x) \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2,$$

обозначим через $J_{M'} : M' \rightarrow M'$ конформную инволюцию, заданную формулой $J_{M'}(x, w) = (x, -w)$. Можно показать, что

а) накрытие \tilde{R} можно выбрать таким образом, что $\tilde{R}J_{M'} = J_{T(\mathbf{Q})}\tilde{R}$;

б) условия а) достаточно, чтобы показать, что \tilde{R} опускается на базы диаграммы выше.

Мы не будем доказывать пункты а) и б), но мы покажем, как по модулю пунктов а) и б) доказывается теорема 3.

То, что $R(x)$ из пункта б) является рациональной функцией – следует из того, что $R(x)$ конформное отображение из сферы Римана в сферу Римана. В следующем абзаце мы покажем, что при чебышевском соответствии $R(x)$ соответствует кривая M .

Заметим, что множество неподвижных точек при отображении $J_{M'}$ в точности равно $\{(e_j, 0)\}$, где e_j – нули многочлена $f(x)$. Из пункта а) следует, что отображение \tilde{R} переводит неподвижные точки инволюции J_M в неподвижные точки инволюции $J_{T(\mathbf{Q})}$ и имеет в них нечетный индекс ветвления. Соответственно, образ дивизора ветвления $R\{e_j\}$ целиком лежит в \mathbf{Q} и индекс ветвления $R(x)$ в каждой из точек e_j – нечетный. Во всех других преобраз $x \in R^{-1}\mathbf{Q}$ индекс – четный, т.к. индексы отображений при композиции перемножаются и

$$\text{ind } p_{rM}(x, w) = \begin{cases} 1 & x = e_j \\ 2 & x \neq e_j \end{cases} \quad \text{ind } p_{rT(\mathbf{Q})}(x, w) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbf{Q} \\ 2 & x \notin \mathbf{Q} \end{cases}.$$

Поэтому точки $\{e_j\}$ являются точками, в которых функция $R(x)$ принимает значения в \mathbf{Q} с нечетной кратностью. По замечанию 2.а, множество $\{e_j\}$ является корнями многочлена $W(x)$. Следовательно, аффинная часть M задается уравнением

$$w^2 = W(x), \quad (x, w) \in \mathbb{C}^2.$$

□

Теорема 3 дает описание всех римановых поверхностей, которые лежат в образе чебышевского соответствия. Однако условие данной теоремы сложно проверяются.

Основная теорема

В теореме 4 мы не определяем функцию K и число τ , см. [Bo10].

Теорема 4. [Bo10] Вещественная гиперэллиптическая кривая $M(e)$, имеющая хотя бы один вещественный овал, является образом вещественной рациональной функции $R(x)$ при чебышевском соответствии с множеством $\mathbf{Q}(\kappa)$, $0 < \kappa < 1$, если и только если на кривой существует голоморфный дифференциал $d\zeta$, периоды которого удовлетворяют условиям:

$$\int_C d\zeta \in 4\mathbb{Z}, C \in L_M^+ := (I + \tilde{J}_M)H_1(M, \mathbb{Z}),$$

$$\int_C d\zeta \in 2\tau\mathbb{Z}, C \in L_M^- := (I - \tilde{J}_M)H_1(M, \mathbb{Z}).$$

При выполнении условий выше восстановить рациональную функцию можно по формуле

$$R(x) = sn(2K(\tau) \int_{(e,0)}^{(x,w)} d\zeta + A(e))\tau, \quad A(e) := K(\tau) \begin{cases} \pm 1 & R(e) = \pm 1 \\ \pm 1 + \tau & R(e) = \pm 1/\kappa \end{cases},$$

в которой результат вычисления не зависит от пути интегрирования на X , от двузначности в выборе $w(x)$ и от точки ветвления e , выбранной в качестве начальной точки интегрирования.

Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation

Egorov.V.M.

Introduction

There are several main directions in the theory of Diophantine approximations. Here are examples of some problems and open questions.

Problem 1 Given m vectors $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^n$ and the non-increasing function $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, how many solutions (\mathbf{p}, q) exist for inequality :

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|q\mathbf{y}_i - \mathbf{p}\| < \psi(q)$$

where $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$, $\mathbf{v} = \max_{j=1, \dots, m} |v_j|$?

Problem 2 Given non-increasing function $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, what is the measure of such sets $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_m \in \mathbb{R}^n$ (in the sense of the Lebesgue measure on \mathbb{R}^{mn}) that the inequality :

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|q\mathbf{y}_i - \mathbf{p}\| < \psi(q)$$

has infinitely many solutions $(q, \mathbf{p}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$?

Problem 3 Given non-increasing function $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, open and connected subset U of \mathbb{R}^d and $f_1, \dots, f_n \in C^m(U)$, $d < n$, what is the measure of such points $\mathbf{y} \in M = \{(f_1(x), \dots, f_n(x)) | x \in U\}$ (in the sense of the Lebesgue measure on U) that the inequality :

$$\|q\mathbf{y} - \mathbf{p}\| < \psi(q)$$

has infinitely many solutions $(q, \mathbf{p}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$?

After the work [D1],[KM1],[KM2] it became clear that these issues are closely related to the behavior of some flows on homogeneous spaces.

Preliminaries

Definition 1 Fix $n \in \mathbb{N}$ and consider $\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{ \text{the set of unimodular lattices in } \mathbb{R}^n \} = SL_n(\mathbb{R})/SL_n(\mathbb{Z})$ - is the space of lattices.

In the future, we will need the ability to determine whether a certain trajectory in the lattice space is bounded or not. We will understand boundedness as belonging to some compact set.

Theorem (Mahler's compactness theorem) Let \mathcal{F} be some subset of Ω . \mathcal{F} is relatively compact if and only if there is a number $\rho > 0$ such that for every lattice $\mathbf{t} \in \mathcal{F}$ in $f_v \in \mathbf{t} \|v\| \geq \rho$

Definition 2 Let $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{y} is Very Well Approximable (VWA) if for some $\epsilon > 0$ there are infinitely many $q \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ such that :

$$\|q\mathbf{y} - \mathbf{p}\|^n < \frac{1}{|q|^{1+\epsilon}}$$

Definition 3 Let $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, \mathbf{y} is Very Well Multiplicatively Approximable (VWMA) if for some $\epsilon > 0$ there are infinitely many $q \in \mathbb{Z}$, $\mathbf{p} \in \mathbb{Z}^n$ such that :

$$\prod_{i=1}^n |qy_i - p_i| < \frac{1}{|q|^{1+\epsilon}}$$

It is not difficult to see that VWMA-numbers are also VWA-numbers.

Definition 4 Let U be open and connected subset of \mathbb{R}^d , $f_1, \dots, f_n \in C^n(U)$, manifold $M = \{(f_1(x), \dots, f_n(x)) | x \in U\}$ is called extremal if almost all points M relative to the Lebesgue measure on U are not VWA

Main Results

Definition 4 Let $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, then $L_{\mathbf{y}} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{y}^T \\ 0 & Id_n \end{pmatrix}$, where Id_n is identity $n \times n$ matrix

Definition 5 $g_{\mathbf{t}} = \text{diag}(e^{t_0}, e^{-t_1}, \dots, e^{-t_n})$, $\mathbf{t} = (t_0, t_1, \dots, t_n)$, $\sum_{i=1}^n t_i = t_0$ is geodesic flow

Theorem (Dani's correspondence [D1]) If $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ is VWMA, then $g_{\mathbf{t}}(L_{\mathbf{y}})$ is unbounded (in sense of Mahler's compactness theorem)

Theorem (Khinchin-Groshev theorem [KM1]) Let $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be a non-increasing continuous function. If there are infinitely many solutions $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ to the inequality

$$\|(\mathbf{q}, \mathbf{y}) - \mathbf{p}\| < \psi(\|\mathbf{q}\|^n)$$

for almost all (resp. almost no) \mathbf{y} then the integral $\int_1^\infty \psi(x) dx$ diverges (resp. converges)

Theorem ([KM2]) Let f_1, \dots, f_n be analytic in U , where U is an open subset of \mathbb{R}^d , which together with 1 are linearly independent over \mathbb{R} . Then the manifold $M = \{(f_1(x), \dots, f_n(x)) | x \in U\}$ is strongly extremal

References

- D1 S. G. Dani, Divergent trajectories of flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation, J. Reine Angew. Math. 359 (1985), 55–89
- KM1 D. Kleinbock and G. A. Margulis, Logarithm laws for flows on homogeneous spaces, Inv. Math. 138 (1999), 451–494.
- KM2 D. Kleinbock and G. A. Margulis Flows on homogeneous spaces and Diophantine approximation on manifolds, Ann. Math. 148 (1998), 339–360.

R.Peierls's theory of thermal conductivity and the method of quasisolutions

Alexey Elokhin, NRU HSE

In 1929 R.Peierls published his work [1], where the theory of thermal conductivity in solids was described on a heuristic level of rigour. In this paper Peierls models the solid with a lattice of anharmonic oscillators where each of them interacts only with his nearest neighbors. Our goal is to continue his work, namely, we aim to provide a rigorous explanation of the thermal conductivity in a similar setting. Hence, we consider a periodic d -dimensional lattice

$$\mathbb{T}_L^d \stackrel{\text{def}}{=} L^{-1}[\mathbb{Z}^d/L\mathbb{Z}^d]$$

equipped with a Hamiltonian $H(z) = H_2 + \varepsilon H_4$, where

$$H_2(z) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{j} \in \mathbb{T}_L^d} \left[p_{\mathbf{j}}^2 + \sum_{\mathbf{l} \in U_L} (q_{\mathbf{j}+\mathbf{l}} - q_{\mathbf{j}})^2 \right]$$

$$H_4(z) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4 \in \mathbb{T}_L^d} c_{\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \mathbf{j}_3, \mathbf{j}_4} q_{\mathbf{j}_1} q_{\mathbf{j}_2} q_{\mathbf{j}_3} q_{\mathbf{j}_4}$$

Following Peierls, we perform a sequence of canonical transformations and proceed with adding small viscosity and noise. This gives the following equation of motion:

$$\dot{a}_{\mathbf{k}}^{\pm} = -i\rho L^{-d} \Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{a}, \tau\nu^{-1}) - \gamma_{\mathbf{k}}^{\pm} a_{\mathbf{k}}^{\pm} + b^{\pm}(\mathbf{k}) \dot{\beta}_{\mathbf{k}}^{\pm}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{T}_L^d,$$

where $\Psi_{\mathbf{k}}^{\pm}(\mathbf{a}, t)$ is the nonlinearity. We are interested in the energy spectrum of the solution since this is a physically measurable quantity. We also consider its expansion in the parameter ρ

$$\mathbf{n}_{\mathbf{k}}^{\pm}(\tau) = \mathbb{E}|a_{\mathbf{k}}^{\pm}(\tau)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \rho^i \mathbf{n}_{\mathbf{k};\pm}^{(i)} \quad (1)$$

For now we limit our consideration only to the first three terms of the series. Our goal is to show that in the limit $L \rightarrow \infty$ and $\nu \rightarrow 0$ they obey a certain kinetic equation. It is easy to show that

$$\mathbf{n}_{\mathbf{k};\pm}^{(0)} \sim 1, \quad \mathbf{n}_{\mathbf{k};\pm}^{(1)} = 0$$

due to Wick theorem and certain relations on indexes. The next term

$$\mathbf{n}_{\mathbf{k};\pm}^{(2)}(\tau) = \mathbb{E}|a_{\mathbf{k};\pm}^{(1)}|^2 + 2\Re \mathbb{E} a_{\mathbf{k};\pm}^{(2)} \overline{a_{\mathbf{k};\pm}^{(0)}}$$

is less trivial, and the first step of its analysis is to approximate it with the following integral expression as $L \rightarrow \infty$:

$$I_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \nu^2 \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 = \pm 1} \int_{\mathcal{D}^3} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2 d\mathbf{k}_3$$

$$\delta_{1,2,3}^{-k} \frac{F_{\mathbf{k}}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3)}{\nu^2 (\Gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))^2 + (\Omega_{\mathbf{k}}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3))^2}.$$

The next step is to obtain the asymptotics of the expression above in the limit $\nu \rightarrow 0$ and this is where the problem becomes difficult since we need to precisely examine the critical points of the function

$$\Omega_{\mathbf{k}}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \sigma_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + \sigma_2 \omega_{\mathbf{k}_2} + \sigma_3 \omega_{\mathbf{k}_3} - \sigma \omega_{\mathbf{k}},$$

where

$$\omega_{\mathbf{k}}^2 = \sum_{i=1}^d \sin^2 \pi k_i$$

is a dispersion relation. In order to ensure the convergence of the integral above, we need to show that there are no degenerate

(2) critical points in the domain $\{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) : \Omega_{\mathbf{k}}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma} = 0\}$.

In other words, we are studying the solutions of the following system of equations: (3)

$$\begin{cases} \sigma_1 \omega_{\mathbf{k}_1} + \sigma_2 \omega_{\mathbf{k}_2} + \sigma_3 \omega_{\mathbf{k}_3} - \sigma \omega_{\mathbf{k}} = 0, \\ \sigma_j \frac{\sin(2\pi(\mathbf{k}_j)_i)}{\omega_{\mathbf{k}_j}} + \sigma_3 \frac{\sin(2\pi(\mathbf{k}_3)_i)}{\omega_{\mathbf{k}_3}} = 0, \\ \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3 + \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d. \end{cases}$$

It appears that apart from certain arithmetic insights it is impossible to solve the system analytically, so we turned our attention to the numerical approach. We found out that:

- 1) The critical points almost always have a regular structure, i.e. the coordinates satisfy some simple relations (yet we were unable to prove this),
- 2) There is a submanifold \mathcal{B}^1 , $\dim \mathcal{B}^1 = d - 1$, such that if $\mathbf{k} \in \mathcal{B}^1$ then we have at least one degenerate critical point of the same regular structure,
- 3) There is a submanifold \mathcal{B}^2 , $\dim \mathcal{B}^2 = d - 2$, such that if $\mathbf{k} \in \mathcal{B}^2$ then we have degenerate critical points of different structure that becomes more complex with growth of d .

Thus, we can only obtain the asymptotics of the integral above for $\mathbf{k} \notin \mathcal{B}^1 \cup \mathcal{B}^2$, i.e., for such \mathbf{k} we have

$$|I_{\mathbf{k}}^{\sigma} - \nu \hat{I}_{\mathbf{k}}^{\sigma}| \leq C(\mathbf{k}) \nu^2 \chi_{d,2}(\nu),$$

where

$$\hat{I}_{\mathbf{k}}^{\sigma} = \pi \sum_{\mathcal{K}_{3,\sigma}} \int_{\mathbb{M}_{\mathbf{k};\mathbf{k}_3}} \frac{\hat{F}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))}{|\nabla \hat{\Omega}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))|} d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2|_{\mathbb{M}_{\mathbf{k}}}$$

(4) We aim to achieve the following result:

$$|\mathbf{n}_{\mathbf{k};\sigma}^{\leq 2}(\tau) - m(\tau; \mathbf{k})| \leq C\varepsilon^2,$$

where $m(\tau; \cdot)$ is a solution of the wave kinetic equation

$$\dot{m}(\tau; \mathbf{k}) = -2\gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma} m(\tau; \mathbf{k}) + \varepsilon K(m(\tau; \cdot))(\mathbf{k}) + 2b^{\sigma}(\mathbf{k}),$$

and $K(m(\tau; \cdot))$ is a wave kinetic integral operator defined as

$$K(y)(\mathbf{k}) = 2\pi \sum_{\mathcal{K}_{3,\sigma}} \int_{\mathbb{M}_{\mathbf{k};\mathbf{k}_3}} \frac{d\mathbf{k}_1 d\mathbf{k}_2|_{\mathbb{M}_{\mathbf{k}} y_1 y_2 y_3 y_{\mathbf{k}}}}{|\nabla \Omega_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2))|}$$

$$\times \left(\frac{1}{y_{\mathbf{k}}} + \frac{1}{y_3} - \frac{1}{y_2} - \frac{1}{y_1} \right)$$

The key step in proof of the main result is to show that

$$\dot{\mathbf{n}}_{\mathbf{k}}^{\leq 2} = -2\gamma_{\mathbf{k}}^{\sigma} \mathbf{n}_{\mathbf{k}}^{\leq 2} + b^{\sigma}(\mathbf{k}) + \varepsilon K(\mathbf{n}_{\mathbf{k}}^{\leq 2})(\mathbf{k}) + O(\varepsilon^4),$$

which is done via estimating the increments of $\mathbf{n}_{\mathbf{k}}^{\leq 2}$. Currently the work in this direction is ongoing.

References

- [1] Peierls, R. (1929). Zur kinetischen Theorie der Wärmeleitung in Kristallen. In *Annalen der Physik* (Vol. 395, Issue 8, pp. 1055–1101). Wiley.
- [2] Dymov, A., Kuksin, S. Formal Expansions in Stochastic Model for Wave Turbulence 1: Kinetic Limit. *Commun. Math. Phys.* **382**, 951–1014 (2021).
- [3] Dymov, A.V. Asymptotic expansions for a class of singular integrals emerging in nonlinear wave systems. *Theor Math Phys* **214**, 153–169 (2023).

Особые экстремали в задачах вариационного исчисления на выпуклых кривых

Жеглов С.А.

МГУ им. М.В.Ломоносова

Рассмотрим классическую задачу вариационного исчисления:

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \min, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad f \in C^2(\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}), \quad x \in \text{Lip}([t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}).$$

Решение этой задачи легко получить, используя идею малой вариации кривой, то есть решив уравнение Эйлера-Лагранжа. Однако, в приложениях часто необходимо найти решение не в классе всех липшицевых кривых, а в классе всех выпуклых кривых. В этом случае идея малых вариаций уже не работает. Так, в задаче

$$J(x) = \int_0^1 x dt \rightarrow \max, \quad x(0) = x(1) = 0$$

оптимальная выпуклая кривая имеет вид $\hat{x}(t) \equiv 0$, но при этом

$$J(\hat{x} + \varepsilon h) - J(\hat{x}) = \varepsilon J(h) = O(\varepsilon) \neq O(\varepsilon^2).$$

Возникает идея наложить условие $\ddot{x} \geq 0$ и применить принцип максимума Понтрягина, положив $u = \ddot{x}$. При таком подходе u , вообще говоря, является обобщённой функцией, потому что оптимальная выпуклая кривая может иметь изломы. Это сильно затрудняет исследование. Например, у экстремалей в этой задаче может быть до двух изломов:

$$\int_{-1}^1 \dot{x}^2 (\dot{x}^2 - 1)^2 dt \rightarrow \min, \quad x(-1) = x(1) = 0, \\ \hat{x}(t) = \max(|t| - 1, a), \quad a \in [-1, 0].$$

Оказывается, есть способ свести задачу к принципу максимума, который избавляет нас от необходимости работать с обобщёнными функциями. В задачах, где функция f зависит только от \dot{x} , особые экстремали устроены довольно интересно. Работа посвящена именно им.

Определение

1-графиком выпуклой функции $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называется

$$\text{graph}^1 x = \{(t, x(t), y) \mid t \in \text{dom}(x), y \in \partial x(t)\}.$$

Теорема

Если \hat{x} – оптимальная выпуклая кривая в задаче

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t, x, \dot{x}) dt \rightarrow \min, \quad x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad \dot{x}(t_0 + 0) \geq s_0, \quad \dot{x}(t_1 - 0) \leq s_1,$$

то $\text{graph}^1 \hat{x}$ совпадает с графиком $(t(\alpha), x(\alpha), y(\alpha))$, где t, x, y получаются из некоторой экстремали следующей задачи оптимального управления:

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_1} f(t, x, y) u d\alpha \rightarrow \min, \quad u(\alpha) \in [0, 1], \quad t' = u, \quad x' = yu, \quad y' = 1 - u, \\ t(\alpha_0) = t_0, \quad t(\alpha_1) = t_1, \quad x(\alpha_0) = x_0, \quad x(\alpha_1) = x_1, \quad y(\alpha_0) = y_0. \quad (*)$$

Исследуем класс задач, в которых интегрант зависит только от скоростей, т.е. $f_t = f_x = 0$. Дополнительно потребуем, чтобы множество нулей f_{yy} было конечным. Условимся обозначать $f(\cdot) = f(t, x, \cdot)$.

Пусть существует прямая, касающаяся графика $f(y)$ в точках y_1, \dots, y_k и лежащая целиком под графиком. Обозначим наклон некоторой такой прямой за φ_0 . Тогда исходная задача ВИ эквивалентна следующей:

$$\int_{t_0}^{t_1} (f(\dot{x}) - \varphi_0 \dot{x}) dt \rightarrow \min,$$

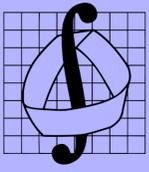
Поскольку у функции $f(y) - \varphi_0 y$ есть ровно k минимумов, то новый функционал минимизируется очевидным образом – нужно, чтобы \dot{x} в любой момент времени был равен одному из y_1, \dots, y_k . Среди таких экстремалей выпуклыми являются те, у которых \dot{x} монотонно возрастает.

Что это за экстремали с точки зрения принципа максимума в задаче $(*)$?

Теорема

Описанные выше кривые – особые экстремали в $(*)$. Кроме того, в исследуемом классе задач особые экстремали всегда имеют такой вид.

Можно получить похожие результаты и для некоторых других классов задач. Например, если $f_y = 0$ и $f > 0$, то особые экстремали – тоже ломаные.



Динамика асимметричного флюгера в разреженном потоке

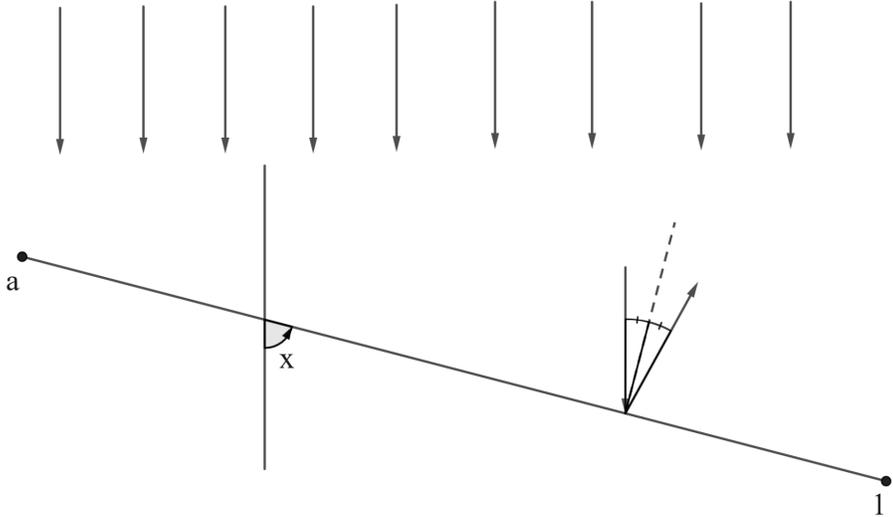
Зиатдинов Наиль

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Аннотация

Для динамики стержня на плоскости, асимметрично закрепленного в одной из своих точек со свободным вращением вокруг нее, в потоке невзаимодействующих точечных частиц, движущихся с постоянной скоростью и при столкновении со стержнем взаимодействующих с ним по закону бильярда не более одного раза, получены уравнения динамики стержня, изучены локальные фазовые портреты вблизи особых точек системы уравнений динамики, дано качественное описание фазового портрета этой системы в целом. Оказалось, что с точностью до гомеоморфизма её фазовый портрет совпадает с фазовым портретом математического маятника с трением.

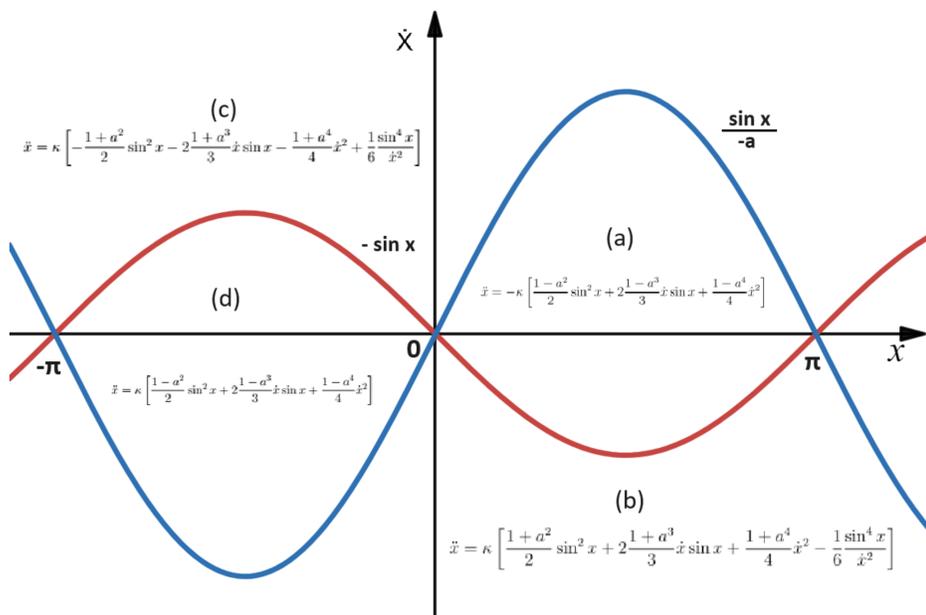
Уравнения динамики



Путем изменения масштаба длины, мы добьемся, чтобы "большая" часть флюгера от опорной точки имела длину 1, а "меньшая" ($-a$) при $a \in (-1, 0]$. Таким образом, его общая длина тогда равна $1+a$. Теперь изменением масштаба времени сделаем величину скорости потока равной единице. Обозначая через $x, x = x(t)$, угол, образуемый в момент времени t большей частью флюгера (от опорной точки) с направлением вектора скорости потока, приходим в следующем уравнению динамики

$$\ddot{x} = -\kappa \int_a^1 (\sin x + r\dot{x}) |\sin x + r\dot{x}| r dr, \quad (1)$$

где \dot{x} и \ddot{x} первая и вторая производная от x по t , а параметр κ равен удвоенному отношению плотности потока к моменту инерции флюгера. Интегрирование происходит по-разному в зависимости от значений x и \dot{x} .



После стандартного ввода переменной $y = \dot{x}$ получим:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = \kappa v(x, y). \quad (4)$$

У системы две особые точки: $(0, 0)$ и $(\pi, 0)$ с точностью до 2π по первой координате.

Особая точка $(\pi, 0)$

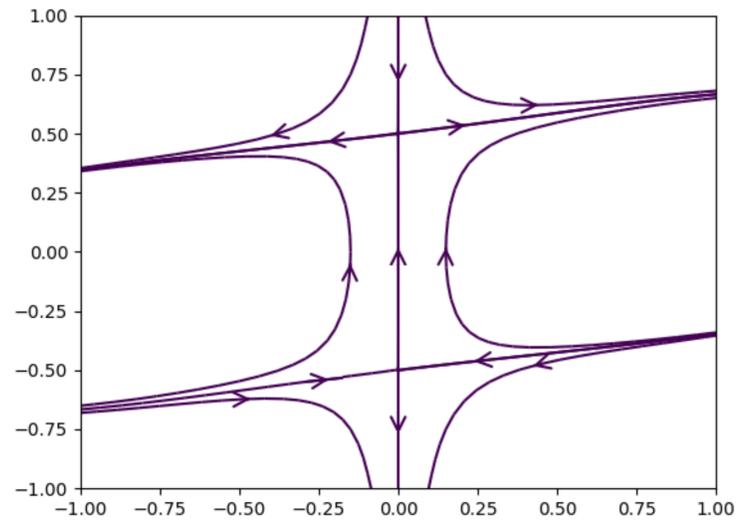
Рассмотрим область (d), заменим координаты вблизи $(\pi, 0)$ на z, w :

$$x = \pi + z^2, \quad y = wz^3, \quad z > 0$$

После деления на z получаем:

$$\dot{z} = \frac{wz}{2}, \quad \dot{w} = \kappa \left\{ -\frac{3}{2}w^2 + \frac{1-a^2 \sin^2 z^2}{2z^4} + 2\frac{1-a^3 \sin z^2}{3z^2} wz + \frac{1-a^4}{4} w^2 z^2 \right\}$$

Эта система гладко продолжается на всю плоскость z, w . У системы две неподвижные точки: $z_0 = 0, w_0 = w_{\pm}$ с $w_{\pm} = \pm \sqrt{\frac{1-a^2}{3}}$. Линеаризация в этих точках: $\begin{pmatrix} \frac{w_0}{2} & 0 \\ \frac{2(1-a^3)}{3} \kappa w_0 & -3\kappa w_0 \end{pmatrix}$. Собственные значения: $\frac{w_0}{2}, -3\kappa w_0$ Они вещественны и имеют разные знаки, значит, точки - невырожденные седла.



После замены координат в области (c) w, y , где $wy = \sin x$:

$$\dot{w} = -\sqrt{1-w^2y^2} - wyF(w, y), \quad \dot{y} = y^2F(w, y),$$

$$\text{где } F(w, y) = -\kappa \left[\frac{1+a^2}{2} w^2 + 2\frac{1+a^3}{3} w + \frac{1+a^4}{4} - \frac{w^4}{6} \right]$$

Вблизи отрезка $S = \{-1 \geq w \geq -a, y = 0\}$ кривая от $(w = -a, y_0)$, где $y_0 > 0$, пересекает линию $w = -1$ при $y > 0$. Отсюда около $(\pi, 0)$ фазовые кривые от точек $y = -\frac{\sin x}{a}$ при $a \neq 0$ идут к точкам $y = -\sin x$ с положительной скоростью по оси x .

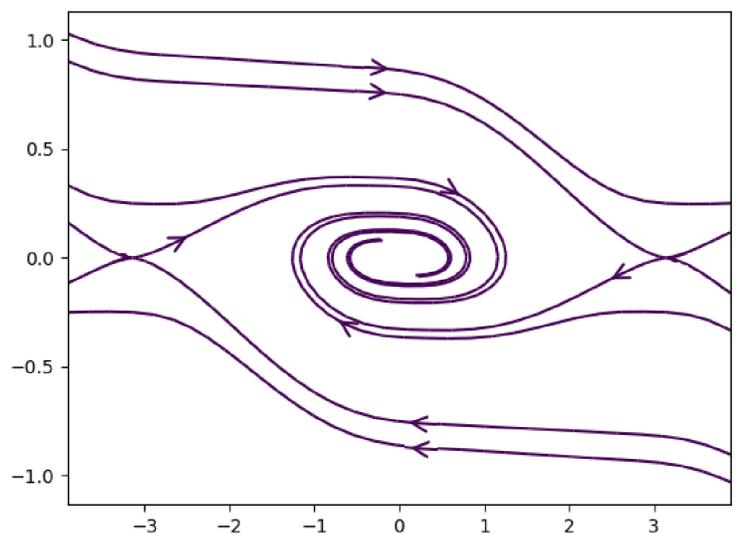
Особая точка $(\pi, 0)$ топологически является седлом

Особая точка $(0, 0)$

Пусть $\frac{dy}{dx}(x, y) = \frac{v(x, y)}{y}$ - наклон векторного поля. Сепаратрисы, исходящие из седла, стремятся к $(0, 0)$.

Лемма 1. Если $y \sin x > 0$, тогда $\frac{dy}{dx}(x, y) \leq -\frac{dy}{dx}(-x, y)$. Если, кроме того, одна из точек (x, y) и $(-x, y)$ лежит внутри области (b) или (c) тогда это неравенство является строгим.

Следствие 1. Точка $(0, 0)$ топологически является устойчивым фокусом системы.



Список литературы

- [1] A. Davydov, A. Plakhov. Dynamics of a pendulum in a rarefied flow, Regular and Chaotic Dynamics, 2024, 29:1, 134-142
- [2] Зиатдинов Н. Курсовая работа "Динамика асимметричного маятника в разреженном потоке", 2024.

ДИСКРЕТНЫЙ СИНУС-ПРОЦЕСС

Под дискретным синус-процессом понимается борелевская вероятностная мера, введённая на пространстве двусторонних последовательностей $\text{Conf}(\mathbb{Z}) = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ следующим образом: для набора попарно различных точек $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ определим $n^{\text{ю}}$ корреляционную функцию равенством

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \mathbb{P}\{x_1, \dots, x_n \in X\}$$

Отметим, что корреляционные функции однозначно определяют меру. Нас интересует детерминантная мера, отвечающая следующим корреляционным функциям:

$$\rho_n(x_1, \dots, x_n) = \det[K(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$$

где $K_\theta(x, y) : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ - дискретное синус-ядро, определяемое формулой

$$K_\theta(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(\theta(x-y))}{\pi(x-y)}, & \text{если } x \neq y \\ \frac{\theta}{\pi}, & \text{если } x=y \end{cases} \quad 0 < \theta < \pi$$

Факт того, что $K_\theta(x, y)$ действительно задаёт вероятностную меру, гарантируется теоремой Маки-Сошникова. В силу инвариантности K_θ относительно сдвига $(T\omega)_i = \omega_{i+1}$, полученная вероятностная мера также инвариантна относительно T и интерес представляет энтропия системы $(\text{Conf}(\mathbb{Z}), \mathbb{P}, T)$.

ЭНТРОПИЯ

Напомним, что метрической энтропией динамической системы (X, \mathcal{B}, μ, T) называют число (в т. ч. ∞)

$$h_\mu(T) = \sup_\xi h(T, \xi)$$

где ξ пробегает конечные измеримые разбиения X ,

$$h(T, \xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H(\xi \vee T^{-1}\xi \vee \dots \vee T^{-n+1}\xi)$$

$$H(\xi) = - \sum_{A \in \xi} \mu(A) \log \mu(A)$$

и предел выше существует в силу субаддитивности. Метрическая энтропия является важным инвариантом динамических систем. Позже было введено понятие топологической энтропии. Пусть (X, d) - метрический компакт, $T : X \rightarrow X$ - непрерывно. Для $n \in \mathbb{N}$ введём метрики d_n на X :

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n} d(T^j(x), T^j(y))$$

т. е. $d_n(x, y)$ описывает max расстояние, на котором x и y оказываются за время первых n итераций. Для заданного $\varepsilon > 0$ обозначим через $r_n(\varepsilon)$ мощность наименьшей ε -сети (X, d_n) . Определим топологическую энтропию системы как

$$h(T) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\varepsilon)$$

Следующий вариационный принцип устанавливает связь между топологической и метрической энтропией:

Теорема

(X, d) - метрический компакт, $T : X \rightarrow X$ - непрерывно, $M(T, X)$ - инвариантные относительно T вероятностные меры на X . Тогда

$$h(T) = \sup_{M(X, T)} h_\mu(T)$$

$\mu \in M(X, T)$ называется мерой максимальной энтропии, если на ней достигается sup. Вообще говоря такой меры может и не оказаться, известны соотв. примеры. Хорошо известен следующий результат о топологических Марковских цепях:

Теорема

Метрическая энтропия топологической марковской цепи (p, P) равна

$$h(T) = - \sum p_i p_{ij} \log p_{ij}$$

в то время как топологическая энтропия (если P - неприводима)

$$h(T) = \log \lambda$$

где $\lambda = \rho(A)$ - max по модулю собственное значение матрицы P .

МЕРА ПАРРИ КАК МЕРА МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИИ

Топологической марковской цепью назовём сдвиг на пространстве разрешённых последовательностей, заданном матрицей смежности A . Допустимые стохастические матрицы P в паре с начальным распределением \mathbf{p} задают семейство марковских мер, которыми мы можем снабдить нашу цепь. Напомним теорему Перрона-Фробениуса:

Теорема

Пусть $A \geq 0$ - неприводима. Тогда $\rho(A)$ является собственным значением A и $\exists!$ (с точностью до умножения на const) положительный $v > 0$, отвечающий $\rho(A)$.

Пусть $a_{ij} \in \{0, 1\}$ и $\exists n : A^n > 0$. Пусть λ - max собственное значение из теоремы Перрона-Фробениуса, $v > 0$ - соответствующий λ собственный вектор. Понятно также, что тогда существует положительный левый собственный вектор $u > 0$ т.ч. $u^\top A = \lambda u^\top$. Нормируя u , добьёмся $u \cdot v = 1$. Тогда марковская мера, задаваемая вектором вероятностей

$$p_i = u_i v_i \text{ и матрицей переходов } p_{ij} = \frac{a_{ij} v_j}{\lambda v_i}$$

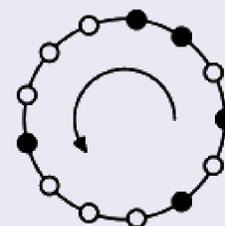
называется мерой Парри. Легко убедиться, что полученная матрица $P = (p_{ij})$ - стохастическая, а \mathbf{p} - её единичный (по построению) левый инвариантный вектор. Мера Парри отличается тем, что все допустимые цепочки переходов фиксированной длины между заданными начальным и конечным состояниями равновероятны:

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} = \frac{a_{i_0 i_1} v_{i_1}}{\lambda v_{i_0}} \frac{a_{i_1 i_2} v_{i_2}}{\lambda v_{i_1}} \dots \frac{a_{i_{n-1} i_n} v_{i_n}}{\lambda v_{i_{n-1}}} = \frac{v_{i_n}}{\lambda^n v_{i_0}}$$

Оказывается также, что если A - неприводима, то мера Парри - единственная мера max энтропии. (то, что на ней достигается sup - проверяется прямым вычислением)

ЭНТРОПИЯ МОДИФИКАЦИИ TASEP

Вслед за [3] рассмотрим топологическую марковскую цепь, состояниями которой являются конфигурации из N (неразличимых) частиц на дискретной окружности из L ячеек, а переходы состоят в перемещении одной из частиц на одну ячейку в положительном направлении (нахождение двух частиц в одной ячейке запрещено).



Теорема (А. Gordenko)

Топологическая энтропия описанной выше системы равна

$$\ln \frac{\sin \frac{\pi N}{L}}{\sin \frac{\pi}{L}}$$

Начнём со случая, когда N нечётно. Каждое из $\binom{L}{N}$ состояний цепи отвечает упорядоченному набору $k_1 < \dots < k_N$ номеров ячеек, занятых частицами. Обозначим $V = \mathbf{C}^L$ и сопоставим этому набору элемент

$$v_{k_1, \dots, k_N} = e_{k_1} \wedge \dots \wedge e_{k_N} \in \Lambda^N V$$

Совокупность этих векторов образует базис пространства $\Lambda^N V$. Если понимать матрицу T переходов топологической цепи как записанный в этом базисе линейный оператор на $\Lambda^N V$, то его действие на базисных векторах выглядит как

$$T(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N}) = C e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_N} + \dots + e_{i_1} \wedge \dots \wedge C e_{i_N}$$

$$C : \Lambda^N V \rightarrow \Lambda^N V \quad C e_k = e_{k+1 \bmod L}$$

Итак, собственные значения оператора T есть всевозможные суммы попарно различных λ_i длины N , где $1 \leq i \leq L$. Очевидно, что наибольшие по модулю суммы получаются при сложении последовательных λ_i , а так как мы рассматриваем случай $N = 2m+1$, мы можем взять

$$\lambda_{-m} + \dots + \lambda_0 + \dots + \lambda_m = e^{-\frac{2m\pi i}{L}} \cdot \frac{1 - e^{\frac{2\pi i(2m+1)}{L}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{L}}} = \frac{\sin(\frac{\pi N}{L})}{\sin \frac{\pi}{L}}$$

1 Лоренцева проблема на трёхмерной группе Гейзенберга

Обозначим \mathbb{H}_3 трехмерную группу Гейзенберга, то есть множество матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_3 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

со стандартной операцией матричного умножения. В этом докладе будут рассмотрены Лоренцевы структуры на группе \mathbb{H}_3 , задаваемые множеством U особого типа. Для удобства сформулируем Подмножество плоскости $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:

(i): Не пусто, выпукло, замкнуто, не содержит ноль, а также удовлетворяет «свойству лучей»:

$$\forall \lambda > 1 \lambda \Omega \subset \Omega.$$

(*): на границе Ω «отсутствуют» лучи, выпущенные из начала координат, т.е.

$$\forall \lambda > 1 \lambda \Omega \cap \partial \Omega = \emptyset.$$

(**): граница $\partial \Omega$ сколь угодно близка к граничным лучам l_0, l_1 конуса $C = \text{cl}(\mathbb{R}_+ \Omega)$, то есть:

$$\partial C = l_0 \cup l_1, \text{dist}(l_0, \Omega) = 0, \text{dist}(l_1, \Omega) = 0.$$

2 Антиполярная и гиперболические функции

Определение 1. Антиполярной множества Ω называется множество

$$\Omega^\circ = \{(p, q) \in \mathbb{R}^{2*} \mid px - qy \geq 1 \forall (x, y) \in \Omega\}$$

Теорема 1 (о би-антиполярности). Пусть $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- Если Ω не отделено строго от нуля, то $\Omega^\circ = \emptyset$.

- Если Ω строго отделено от нуля, то Ω° удовлетворяет Предположению (i).

- Если Ω удовлетворяет Предположению (i), то $\Omega = \Omega^{\circ\circ}$

- Если Ω строго отделено от нуля, то $\Omega^{\circ\circ} = \text{cl}(\text{conv}(\bigcup_{\lambda \geq 1} \lambda \Omega))$

Теорема 2 (о двойственных свойствах). Для множества $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющего Предположению (i), верны следующие утверждения:

- Ω удовлетворяет Предположению (*) только тогда, когда Ω° удовлетворяет Предположению (**).

- Ω° удовлетворяет Предположению (*) только тогда, когда Ω удовлетворяет Предположению (**).

2.1 Функции $\text{ch}_\Omega, \text{sh}_\Omega$

Определение 2. Пусть Ω удовлетворяет указанному предположению. Пусть $\omega_0 = (x_0, y_0) \in \partial \Omega$ - фиксированная точка. Пусть O - начало координат, $\omega = (x, y) \in \partial \Omega$ и θ - удвоенная площадь контура^a $O\omega_0\omega$ (далее будем говорить: « θ - угол точки ω в множестве Ω » или просто « θ - угол в множестве Ω »). Определим

$$\text{ch}_\Omega(\theta) = x, \quad \text{sh}_\Omega(\theta) = y. \quad (1)$$

Эти функции определены либо при всех вещественных углах θ , либо лишь на некотором интервале или открытом луче в силу того, что заматаемая площадь может быть в пределе конечной.

Предложение 1.

$$\text{ch}_\Omega(\theta)\text{ch}_{\Omega^\circ}(\eta) - \text{sh}_\Omega(\theta)\text{sh}_{\Omega^\circ}(\eta) = 1 \Leftrightarrow \eta \in \theta^\circ \Leftrightarrow \theta \in \eta^\circ.$$

Теорема 3. Функции $\text{ch}_\Omega, \text{sh}_\Omega$ имеют правые и левые производные на всей области определения. Если множество θ° содержит единственный элемент η , то

$$\frac{d}{d\theta} \text{ch}_\Omega(\theta) = \text{sh}_{\Omega^\circ}(\eta), \quad \frac{d}{d\theta} \text{sh}_\Omega(\theta) = \text{ch}_{\Omega^\circ}(\eta).$$

Для не более чем счетного набора углов θ левая и правая производные функций $\text{ch}_\Omega, \text{sh}_\Omega$ не совпадают. В таком случае их графики имеют разрывы, совпадающие с отрезками:

$$\{\text{sh}_{\Omega^\circ}(\eta) \mid \eta \in \theta^\circ\}, \quad \{\text{ch}_{\Omega^\circ}(\eta) \mid \eta \in \theta^\circ\},$$

то есть концы этих отрезков задают правые и левые производные.

3 Формулировка результата

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - множество, удовлетворяющее Предположению 1, а непрерывная положительная функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ такова, что ее надграфик удовлетворяет свойствам (i), (*) Предположения 1.

$$U \subset T_e \mathbb{H}_3, U =$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & u_1 & u_3 \\ 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid u_3 \in \mathbb{R}, \exists \omega \in \Omega : (u_1, u_2) = f(u_3) \cdot \omega \right\}$$

Легко видеть, что множество U выпукло, неограниченно, не содержит начало координат и удовлетворяет свойству лучей: $\lambda U \subset U \forall \lambda > 1$. Значит, это множество является единичным шаром некоторой антинормы на конусе $\mathbb{R}_+ U$.

^aТочки O и ω_0 и точки O и ω соединены отрезками, а точки ω_0 и ω соединены участком границы множества Ω .

Найдем явные формулы для геодезических в этой задаче. Как известно, вертикальная система уравнений ПМП на группе Гейзенберга выглядит как:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3 + x_1 u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3 u_2, \\ \dot{h}_2 = h_3 u_1, \\ \dot{h}_3 = 0, \\ u \in \text{argmax}_{u \in U} (u_1 h_1 + u_2 h_2 + u_3 h_3). \end{cases} \quad (2)$$

Теорема 4. При почти всех моментах времени t верно $(h_1, -h_2)(t) \in \partial \Omega^\circ$. Первыми интегралами вертикальной системы (2) являются

$$A = \mu_{\Omega^\circ}(h_1, -h_2) = \text{const} > 0, \quad h_3 = \text{const} \in \mathbb{R}, \quad A^2 + h_3^2 \neq 0,$$

где $\mu_{\Omega^\circ}(h_1, h_2) = \sup\{\lambda \mid \frac{1}{\lambda}(h_1, h_2) \in \Omega^\circ\}$ - функция Минковского множества Ω° . В зависимости от их значений, экстремали ПМП, выпущенные в момент времени $t = 0$ из единицы группы $(0, 0, 0) \in \mathbb{H}_3$:

1. при $h_3 = 0$ имеют вид:

$$x_1(t) = W \text{ch}_\Omega \theta_0 \int_0^t \alpha(s) ds + W \text{ch}_\Omega \theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s)) ds,$$

$$x_2(t) = W \text{sh}_\Omega \theta_0 \int_0^t \alpha(s) ds + W \text{sh}_\Omega \theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s)) ds,$$

$$x_3(t) = u_3^0 \int_0^t \gamma(s) ds + u_3^1 \int_0^t (1 - \gamma(s)) ds + \\ + W \int_0^t x_1 [\alpha(s) \text{sh}_\Omega \theta_0 + (1 - \alpha(s)) \text{sh}_\Omega \theta_1] ds$$

где α, γ - некоторые измеримые неотрицательные функции, не превосходящие 1, число η_0 - некоторая константа из области определения функций $\text{ch}_{\Omega^\circ}, \text{sh}_{\Omega^\circ}$, а точки ω_0, ω_1 (быть может, совпадающие) составляют отрезок $[\omega_0, \omega_1] = \{(\text{ch}_\Omega \theta, \text{sh}_\Omega \theta) \mid \theta \in \eta^\circ\} \subset \partial \Omega$.

Заметим, что для почти всех η_0 множество η° одноэлементно, а функция $\theta(t)$ постоянна (для всех η_0 , если граница Ω не имеет углов).

2. при $h_3 \neq 0$ имеют вид:

$$x_1(t) = \frac{-A}{h_3} (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta(t) - \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0),$$

$$x_2(t) = \frac{-A}{h_3} (\text{ch}_{\Omega^\circ} \eta(t) - \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta_0),$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \frac{A^2}{h_3^2} [\text{ch}_{\Omega^\circ} \eta(t) (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta(t) - 2 \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0) + \\ + \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0 \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta_0 + \eta(t) - \eta_0] + \frac{H}{h_3} t.$$

где

$$H = \min_{v \in \mathbb{R}} (A f(v) + h_3 v) = \text{const},$$

$$\eta(t) = \eta_0 + \frac{h_3^2}{A^2} \int_0^t u_3(s) ds - \frac{h_3 H}{A^2} t,$$

для некоторой константы η_0 из области определения функций $\text{ch}_{\Omega^\circ}, \text{sh}_{\Omega^\circ}$ и некоторой измеримой функции

$$u_3(t) \in \text{argmin}_{v \in \mathbb{R}} (A f(v) + h_3 v).$$

Обратно: любая из перечисленных кривых в пунктах 1, 2 поднимается до экстремали ПМП.

Доказательство

Заметим, что минимум гамильтониана ПМП может быть только положительным. Действительно, если минимум отрицателен, то умножая управление на произвольное число, большее единицы, получим меньшее значение гамильтониана (такое умножение возможно в силу свойства лучей множества управлений). Если же минимум гамильтониана ПМП равен нулю, тогда на границе U есть луч, то есть (б.о.о. $u_3 > 0$), $\forall \lambda > 1 \lambda(f(u_3)\omega, u_3) = (f(\lambda u_3)\omega, \lambda u_3) \in \partial U$. Отсюда следует, что $\omega(\lambda) = \lambda_1 \omega$, $\lambda_1 = \frac{\lambda f(u_3)}{f(\lambda u_3)}$, значит нашлись две точки на границе Ω , связанные умножением на некоторое число λ_1 , что противоречит свойству (*) множества Ω . Таким образом минимум гамильтониана положителен.

Рассмотрим в таком случае несколько случаев. Для начала, пусть $h_1 = h_2 = 0$. В таком случае минимум гамильтониана может достигнут только при $h_3 = 0$, что невозможно в силу ПМП. Пусть $h_1^2 + h_2^2 > 0$. В таком случае минимум гамильтониана может быть достигнут только при условии, что $(h_1, h_2) = A(\text{ch}_{\Omega^\circ} \eta, -\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta)$ для некоторых $A > 0, \eta \in \mathbb{R}$. Заметим, что динамика η есть

$$\dot{\eta} = \frac{-h_2 \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta - h_1 \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta}{A} = -\frac{h_3 f(u_3)}{A} \quad (3)$$

Ещё заметим, что $h_3, A > 0$ - постоянны. В зависимости от их значений найдём экстремали ПМП.

Пусть $h_3 = 0$. Тогда минимум гамильтониана достигается на $(u_1, u_2) = f(u_3)(\text{ch}_\Omega \theta, \text{sh}_\Omega \theta)$, где $u_3 \in \text{argmin}_{v \in \mathbb{R}} f(v)$, $\theta \in \eta^\circ$. В таком случае, учитывая (3), получаем, что

$$\eta = \text{const} \in \mathbb{R}.$$

Уравнения (2) не интегрируются явно в силу произвольности $\theta(t) \in \eta^\circ$ и $u_3(t) \in \text{argmin}_{v \in \mathbb{R}} f(v)$, однако можно заметить, что множества $\text{argmin}_{v \in \mathbb{R}} f(v)$ и $\{(\text{ch}_\Omega \theta, \text{sh}_\Omega \theta) \mid \theta \in \eta^\circ\}$ есть отрезки, так что, обозначив их крайние точки за ω_0, ω_1 и u_3^0, u_3^1 , соответственно, а минимум $f(v)$ за $W = \min_{v \in \mathbb{R}} f(v)$ получим:

$$x_1(t) = W \text{ch}_\Omega \theta_0 \int_0^t \alpha(s) ds + W \text{ch}_\Omega \theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s)) ds,$$

$$x_2(t) = W \text{sh}_\Omega \theta_0 \int_0^t \alpha(s) ds + W \text{sh}_\Omega \theta_1 \int_0^t (1 - \alpha(s)) ds,$$

$$x_3(t) = u_3^0 \int_0^t \gamma(s) ds + u_3^1 \int_0^t (1 - \gamma(s)) ds +$$

$$+ W \int_0^t x_1 [\alpha(s) \text{sh}_\Omega \theta_0 + (1 - \alpha(s)) \text{sh}_\Omega \theta_1] ds$$

где α, γ - некоторые измеримые неотрицательные функции, не превосходящие 1. Понятно, что, фиксировав произвольную пару таких функций, по формулам выше тоже получается экстремаль вида 1.

Теперь перейдём к экстремали вида 3. Пусть $h_3 \neq 0$ (напомним, что $A > 0$). Тогда, учитывая, что $\theta(t) \in \eta^\circ$ и (3), а также правило дифференцирования гиперболических функций $\text{ch}_{\Omega^\circ}, \text{sh}_{\Omega^\circ}$, получаем, что можно явно вычислить интегралы (учитывая, что в момент $t = 0$ траектория в точке $(0, 0, 0)$, и полагая η_0 - произвольная константа из области определения гиперболических функций для антиполярности Ω°):

$$x_1(t) = \int_0^t f(u_3) \text{ch}_\Omega \theta(s) ds = \frac{-A}{h_3} (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta(t) - \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0),$$

$$x_2(t) = \int_0^t f(u_3) \text{sh}_\Omega \theta(s) ds = \frac{-A}{h_3} (\text{ch}_{\Omega^\circ} \eta(t) - \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta_0).$$

Обратим внимание, что здесь θ как (однозначная) функция от η определена при почти всех θ из свойств гиперболических функций, а так же производная η строго положительна, так что выбор значения $\theta \in \eta^\circ$ в точках неоднозначности не играет роли при интегрировании.

Чтобы проинтегрировать x_3 , предварительно вычислим интеграл от формы $\text{sh}_\Omega \theta \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta d\eta$, а также выразим $\int_0^t u_3(s) ds$ через $\eta(t)$.

Пусть $\dot{\eta} > 0$, так что угол $\theta \in \eta^\circ$ определен однозначно в почти все моменты времени. Вычислим первообразную:

$$I = \int \text{sh}_\Omega \theta \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta d\eta = \int \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta d \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta = \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta - \\ - \int \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta \text{ch}_\Omega \theta, d\eta = \\ \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta - \int (1 + \text{sh}_\Omega \theta \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta) d\eta = \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta - \eta - I.$$

Отсюда получаем, что

$$I = \frac{1}{2} (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta - \eta)$$

Действительно, производная этого выражения по η при почти всех η равняется

$$\frac{1}{2} (\text{ch}_\Omega \theta \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta + \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{sh}_\Omega \theta - 1) = \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta.$$

Теперь выразим $\int_0^t u_3(s) ds$ через $\eta(t)$. Заметим, что величина $H = \min_{v \in \mathbb{R}} (A f(v) + h_3 v)$ постоянна, а значит

$$\dot{\eta} = \frac{-h_3 f(u_3)}{A} = \frac{h_3^2}{A^2} u_3 - \frac{h_3 H}{A^2}$$

. Отсюда мы получаем, что при начальном условии $\eta(0) = \eta_0$, произвольно выбранном из области определения функций $\text{ch}_{\Omega^\circ}, \text{sh}_{\Omega^\circ}$, получаем равенства:

$$\eta(t) - \eta_0 = \frac{h_3^2}{A^2} \int_0^t u_3(s) ds - \frac{h_3 H}{A^2} t,$$

$$\int_0^t u_3(s) ds = \frac{A^2}{h_3^2} (\eta(t) - \eta_0) + \frac{H}{h_3} t.$$

Теперь выпишем $x_3(t)$, также имея в виду начальное условие $x_3(0) = 0$.

$$x_3 = \int_0^t u_3(s) ds + \frac{A^2}{h_3^2} \int_0^t (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta(s) - \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0) \text{sh}_\Omega \theta(s) \eta(s) ds.$$

Заметим, что для $u_3(s)$ уже найдено выражение, а второе слагаемое (интеграл $x_1 u_2 ds$) распадается в сумму интеграла $\text{sh}_\Omega \theta d\eta$, который явно вычисляется, а также интеграла $\text{sh}_\Omega \theta \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta d\eta$, который тоже посчитан. Итого, приведя подобные слагаемые, получим

$$x_3 = \frac{1}{2} \frac{A^2}{h_3^2} [\text{ch}_{\Omega^\circ} \eta(t) (\text{sh}_{\Omega^\circ} \eta(t) - 2 \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0) + \\ + \text{sh}_{\Omega^\circ} \eta_0 \text{ch}_{\Omega^\circ} \eta_0 + \eta(t) - \eta_0] + \frac{H}{h_3} t.$$

Таким образом, экстремали типа 3 двигаются по границе множества

$$\frac{-A}{h_3} \Omega^\circ = \left\{ \frac{-h_3}{|h_3|} (p, q) \mid px - qy \geq \frac{A}{|h_3|} \forall (x, y) \in \Omega \right\},$$

причем заматаемая площадь (т.е. угол η) меняется со скоростью $-\frac{f(u_3)h_3}{A}$ для некой измеримой функции $u_3(t) \in \text{argmin}_{v \in \mathbb{R}} (A f(v) + h_3 v)$. Заметим, что при почти всех соотношениях $\frac{A}{h_3}$ эта функция $u_3(t)$ является постоянной, так что заматаемая площадь η меняется линейно на почти всех экстремалиях.



«ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ»

Максимова Ирина Сергеевна, Осипенко Константин Юрьевич
РУДН, МГУ, Москва



Работа посвящена восстановлению решения заданной линейной однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Рассмотрены различные варианты задания исходной информации:

- Задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и ее координаты в начальный момент времени известны со случайной ошибкой. Требуется восстановить решение в момент времени $\tau > 0$.
- Задача решается в предположении, что начальная точка принадлежит некоторому эллипсоиду и решение известно с некоторой случайной ошибкой в момент времени $t=T_1$. Требуется восстановить решение в некоторый момент времени $0 < \tau < T_1$.
- Матрица системы является самосопряженной. Рассмотрены случаи, когда собственные значения матрицы различны, и случай, когда собственные значения матрицы являются кратными.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПО ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ

Пусть X - линейное пространство, Z - линейное нормированное пространство и $T: X \rightarrow Z$ - линейный оператор, $W \subset X$. Линейный оператор $I: X \rightarrow R^n$ задан со случайной ошибкой.

Более точно, зафиксируем $\delta > 0$ и для каждого $x \in W$ будем рассматривать множество случайных векторов

$$Y_\delta = \{y = (y_1, \dots, y_n): M(y) = Ix, D(y_j) \leq \delta^2, j = 1, \dots, n\}.$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta$ элемент из пространства Z , принимаемый за приближение к значению Tx .

Погрешностью метода восстановления $\varphi: R^n \rightarrow Z$ называется величина

$$e(T, W, I, \delta, \varphi) = \left(\sup_{x \in W, y \in Y_\delta} M(\|Tx - \varphi(y)\|^2) \right)^{1/2}.$$

Требуется восстановить значения оператора T на некотором множестве $W \subset X$ по значениям оператора I , заданного со случайной ошибкой.

Задача состоит в нахождении **погрешности оптимального восстановления**

$$E(T, W, I, \delta) = \inf_{\varphi: R^n \rightarrow Z} e(T, W, I, \delta, \varphi)$$

и метода, на котором достигается нижняя грань, называемым **оптимальным**.

Положим $W = \{x \in R^n: \sum_{j=1}^n v_j |x_j|^2 \leq 1\}$, $v_j > 0$, $j=1, \dots, n$.

Определим линейные операторы $T: R^n \rightarrow l_2^n$ и $I: R^n \rightarrow R^n$ следующим образом

$$Tx = (\mu_1 x_1, \dots, \mu_n x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n), \quad \mu_j > 0, \quad j=1, \dots, n.$$

Введем обозначения $\gamma_j = \frac{\sqrt{v_j}}{|\mu_j|}$, $j=1, \dots, n$.

$$\xi_j = \left(\sum_{k=1}^j v_k \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_j} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j=1, \dots, n.$$

Будем считать, что $\gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n$. Нетрудно убедиться, что $0 = \xi_1 \leq \dots \leq \xi_n$.

ТЕОРЕМА 1:

Пусть $\frac{1}{\delta} \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $1 \leq s \leq n-1$ или $\frac{1}{\delta} \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s=n$). Тогда

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^s |\mu_k|^2 \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2}, \quad \text{где}$$

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^s \frac{v_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^s v_k}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^s \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \mu_k y_k e_k,$$

где e_k - стандартный базис в l_2^n , является оптимальным.

Заметим, что

- если δ очень мало, то $s=n$, тогда мы используем все случайные векторы
- если δ большое, то погрешность велика, и как следствие, мы используем для восстановления не всю информацию. Какая-то информация является лишней.

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПО ИСХОДНОЙ ИНФОРМАЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ ОШИБКОЙ

Рассмотрим задачу Коши для системы линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

где $x(t) \in R^n$, $t \geq 0$ и $A = (a_{ij}) \in R$.

Предположим, что матрица A является самосопряженной, $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_n$ - собственные числа матрицы A . Обозначим через $\{e_j\}$, $j=1, \dots, n$ - ортонормированный базис из собственных векторов, соответствующих собственным значениям μ_j , $j=1, \dots, n$.

Пусть $x_0 = \sum_{j=1}^n x_j e_j$.

Тогда решение задачи Коши записывается в виде

$$x(t) = \sum_{j=1}^n e^{\mu_j t} x_j e_j.$$

Предположим, что координаты начальной точки x_0 известны со случайной ошибкой. Пусть, кроме того, известен некоторый эллипсоид, в котором находится точка x_0 . Требуется восстановить решение в момент τ , $\tau > 0$.

Положим для $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$

$$W = \{x \in R^n: \sum_{j=1}^n v_j x_j^2 \leq 1\},$$

$$Tx = (e^{\mu_1 \tau} x_1, \dots, e^{\mu_n \tau} x_n), \quad Ix = (x_1, \dots, x_n).$$

Всякий метод восстановления сопоставляет случайному вектору $y \in Y_\delta$ элемент из пространства R^n , принимаемый за приближение к значению Tx .

Обозначим $\gamma_j = \frac{\sqrt{v_j}}{e^{\mu_j \tau}}$, $j=1, \dots, n$.

$$\xi_j = \left(\sum_{k=1}^j v_k \left(\frac{\gamma_k}{\gamma_j} - 1 \right) \right)^{1/2}, \quad j=1, \dots, n.$$

И применим теорему 1.

ТЕОРЕМА 2:

Пусть $\frac{1}{\delta} \in (\xi_s, \xi_{s+1}]$ при некотором $1 \leq s \leq n-1$ или $\frac{1}{\delta} \in (\xi_n, +\infty)$ (в этом случае считаем $s=n$).

Тогда

$$E(T, W, I, \delta) = \delta \left(\sum_{k=1}^s e^{2\mu_k \tau} \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) \right)^{1/2}, \quad \text{где}$$

$$c_1 = 1 - \frac{\delta^2 \gamma_1 \sum_{k=1}^s \frac{v_k}{\gamma_k}}{1 + \delta^2 \sum_{k=1}^s v_k}$$

а метод

$$\varphi(y) = \sum_{k=1}^s \left(1 - \frac{\gamma_k(1-c_1)}{\gamma_1} \right) e^{\mu_k \tau} y_k e_k,$$

является оптимальным.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рассматриваемых задачах мы не ограничиваемся лишь нормальным распределением случайной величины, а рассматриваем произвольное распределение случайного вектора с фиксированным математическим ожиданием и фиксированной оценкой для дисперсии.

Как и в задачах с детерминированной ошибкой здесь обнаруживаются такие эффекты как

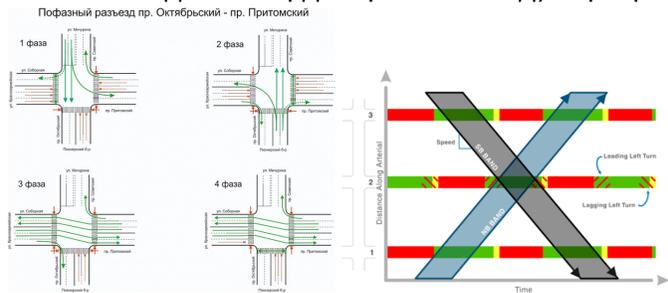
- Линейность оптимального метода
- Возможность использовать не всю доступную для измерений информацию

Адаптивное светофорное регулирование на основе макроскопической модели транспортной сети

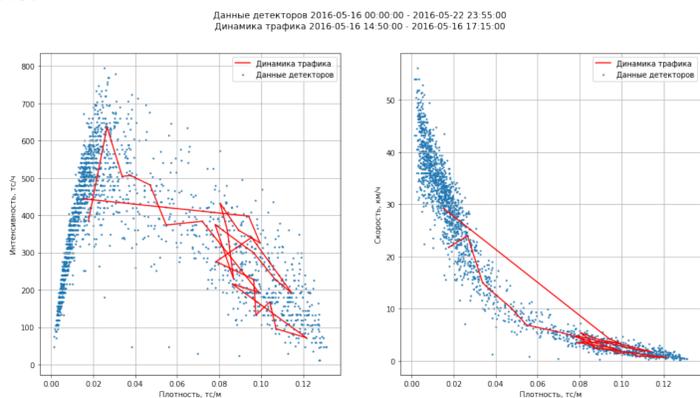
Матросов С.В. ФФ МГУ, кафедра физико-математических методов управления

Введение

Управление перекрестками осуществляется путем переключения фаз. Переключение необходимо координировать между перекрестками.

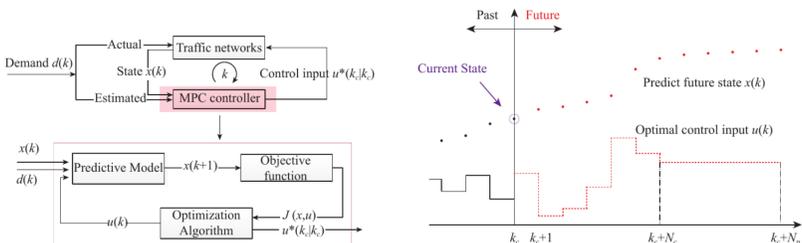


С увеличением числа машин на дороге трафик начинает вести себя нелинейно:



Предиктивное управление

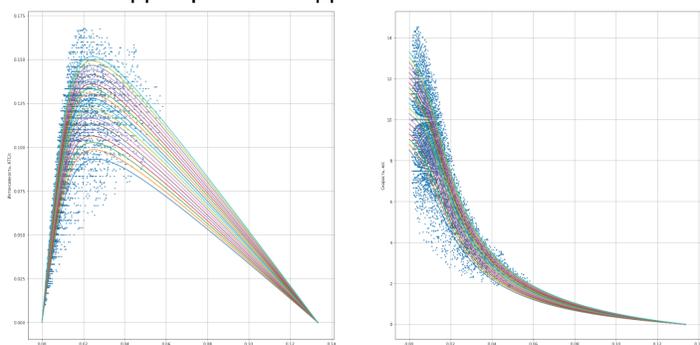
Для управления используем подход MPC:



Для моделирования трафика используем модель GARZ:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0 \\ (\rho \omega)_t + (\rho \omega u)_x = \frac{V_e(\rho) - u}{\tau} \\ u = V(\rho, \omega) \end{cases}$$

Фундаментальная диаграмма модели GARZ:



Слияние транспортных потоков:

$$\begin{aligned} \max_f \sum_{i=1}^N f_i \\ 0 \leq f_i \leq S_i \\ \sum_{i=1}^N f_i \leq R(\rho_m, \omega_m) \end{aligned}$$

Целевая функция:

$$\begin{aligned} CDS(x, u) &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \sum_{l \in L} w(l) \left(\frac{\bar{\rho}_l^t}{\rho_c(\omega_{max})} \right)^2 \\ WWAP(x, u) &= \frac{2}{T^2(T+1)} \sum_{t=1}^T \sum_{c \in C} t_{closed}^c w(l) (\bar{\rho}_{c_{in}}^t - \bar{\rho}_{c_{out}}^t) \\ J(x, u) &= CDS(x, u) + WWAP(x, u) \end{aligned}$$

Оптимизация – метод сглаживания

- Заменяем целевую функцию на ее сглаженный аналог:

$$f_\gamma(x) = \mathbb{E}_e f(x + \gamma e), \quad e \sim UB_2^d(1)$$

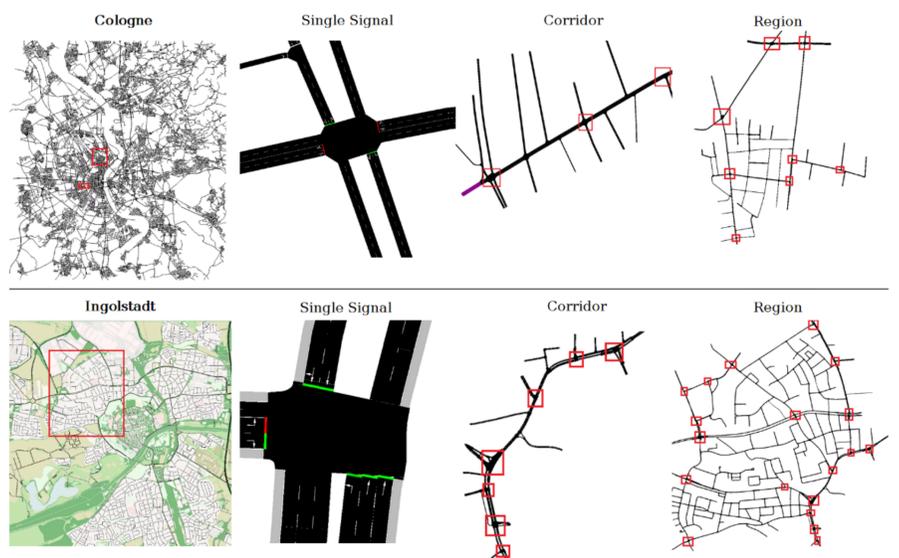
- Используем следующую аппроксимацию градиента:

$$g(x) = \frac{d}{2\gamma} (f(x + \gamma e) - f(x - \gamma e)) e, \quad e \sim US_2^d(1)$$

- Используем для решения сглаженной задачи алгоритмы стохастической оптимизации первого порядка $A(L, \sigma^2)$

Численные эксперименты

Для проведения численных экспериментов использовался пакет SUMO и набор сценариев из бенчмарка RESCO

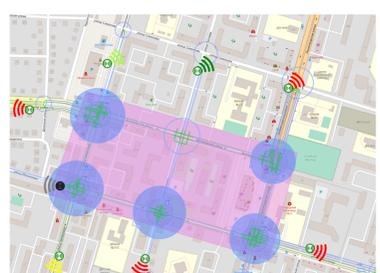


Задержка в транспортной сети:

Сценарий	ФП	ГА	НМ	МС
Arterial4x4	647.5	-	545.4(15.8%)	515.6(20.4%)
Grid4x4	90.2	-	88.7 (1.7%)	89.5 (0.7%)
Cologne1	37.4	-	33.7(5.6%)	-
Cologne3	35.7	31.23(5.28%)	33.7(5.6%)	31.9(10.6%)
Cologne8	43.0	38.94(8.83%)	41.5(3.4%)	39.0(9.4%)
Ingolstadt1	27.9	-	19.3(30.8%)	20.1(28.0%)
Ingolstadt7	61.8	56.36(8.83%)	46.8(23.9%)	52.5(15.1%)

Пробный запуск в Казани

- Адаптивная зона на севере города в Авиастроительном районе рядом с городской больницей №11
- На западе и на севере обширная частная застройка
- 5 светофорных контроллеров
- Видео-детекторы на въездах
- Система управления была запущена 6 апреля и проработала до 28 апреля
- В сравнении с 2 неделями до запуска наблюдается рост интенсивности на 25% и средней скорости на 15%





A CORTICAL-INSPIRED CONTOUR COMPLETION MODEL BASED ON CONTOUR ORIENTATION AND THICKNESS

Alexey Mashtakov (PSI RAS), Ivan Galyaev (ICS RAS)

RSF
Russian Science
Foundation
GRANT 22-11-00140

SUMMARY

An extended four-dimensional version of the traditional Petitot–Citti–Sarti model on contour completion in the visual cortex is examined. The neural configuration space is considered as the group of similarity transformations, denoted as $M = \text{SIM}(2)$. The left-invariant subbundle of the tangent bundle models possible directions for establishing neural communication. The sub-Riemannian distance is proportional to the energy expended in interneuron activation between two excited border neurons. According to the model, the damaged image contours are restored via sub-Riemannian geodesics in the space M of positions, orientations and thicknesses (scales). We study the geodesic problem in M using geometric control theory techniques. We prove the existence of a minimal geodesic between arbitrary specified boundary conditions. We apply the Pontryagin maximum principle and derive the geodesic equations. In the special cases, we find explicit solutions. In the general case, we provide a qualitative analysis. Finally, we support our model with a simulation of the association field.

INTRODUCTION

A mathematical description of the functioning of the human body is a pressing problem in the modern world. The specification of cerebation and neuron operation of the human visual system is of particular interest. The visual cortex consists of billions of neural cells. Neurons are connected in a complex network, which is extremely difficult to analyze due to the huge number of elements and even more connections between them. The direct simulation approach to modeling such systems faces inevitable obstacles. However, there are some fundamental principles that are used in network configuration, e.g., the principle of minimum energy spent on establishing communication between two excited neurons of the network. A promising direction for studying such complex systems is to understand such principles and propose simple mathematical models based on these principles.

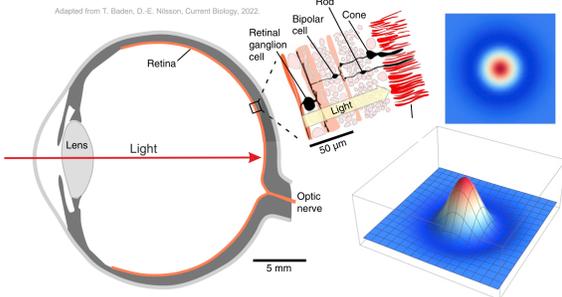
The visual system has a multilayered organization. The complete mechanism of the visual signal processing is not fully understood, however, there is a profound understanding of its early stages and the corresponding mathematical models [1]. The visual signal (the image on the retinal plane)

$$F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+ : (x, y) \mapsto F(x, y)$$

processing is modeled as the action (convolution)

$$(F * K)(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} F(x, y) K(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta$$

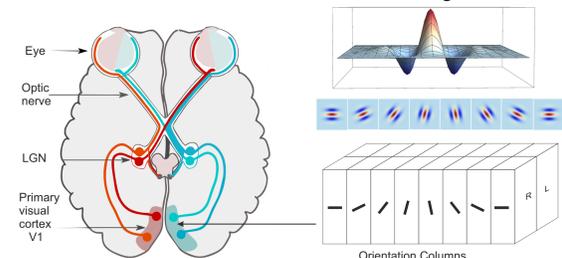
of an appropriate filter $K: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ on the image F . An appropriate filter is a function with a graph similar to the cells' receptive field in a given layer.



The first layer is the eye retina, where the image processing is carried out via the information accumulated in light-sensitive receptors, bipolar, and ganglion cells. Such information includes the spatial coordinates of the image. The receptive field of the retinal cells is well approximated by the Laplacian of Gaussian (LoG) filter specified by a scale parameter $\kappa > 0$:

$$\text{LoG}(x, y) = \frac{1}{\pi \kappa^4} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{2\kappa^2} \right) e^{-\frac{x^2 + y^2}{2\kappa^2}}, \quad \kappa = e^\sigma, \sigma \in \mathbb{R}.$$

After the retina, the visual signal passes through LGN cells of the thalamus and arrives in the visual cortex. Hubel and Wiesel [2] understood the principles of the primary visual cortex V1 processing. They discovered the ability of V1 cells to detect contour segments with different orientations throughout the image.



Mathematically, the operation of V1 simple cells can be modeled as lifting a two-dimensional input image into an expanded space $\text{SE}(2)$ of positions and orientations. The receptive fields of the V1 neurons are well approximated by the Gabor filters

$$G_{(\theta, \sigma)}(x, y) = e^{-(x_\theta^2 + y_\theta^2)} \cos y_\theta,$$

where $x_\theta = e^{-\sigma} (x \cos \theta + y \sin \theta)$, $y_\theta = e^{-\sigma} (-x \sin \theta + y \cos \theta)$.

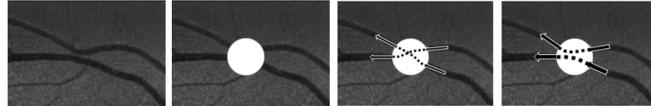
The classic model of Petitot [3], Citti, and Sarti [4] states that the visual system performs contour completion (restoration of a corrupted or partially hidden from observation contour) by finding a sub-Riemannian length minimizer in $\text{SE}(2)$ between two configurations on the boundary of the damaged area.

ACCOUNTING FOR THICKNESS

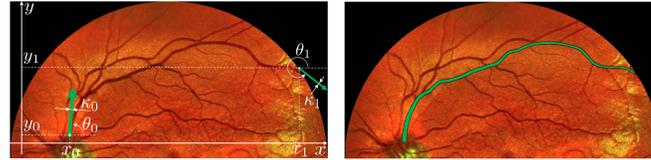
Neurophysiological studies show that spatial hypercolumns in V1 also accumulate secondary information about the visible image, such as contour thickness (scale) and other features. In [5] the classic Petitot–Citti–Sarti model has been extended by taking into account the variable parameter σ . According to the model, the contour completion mechanism by V1 is invariant under parallel translations, rotations, and scaling of the image on the retina. Such transformations constitute the group of orientation-preserving similarity transformations on the plane

$$\text{SIM}(2) = \left\{ q = \begin{pmatrix} e^\sigma \cos \theta & -e^\sigma \sin \theta & x \\ e^\sigma \sin \theta & e^\sigma \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \theta \in S^1, \sigma \in \mathbb{R} \right\}.$$

This extension is intended for image processing tasks to restore damaged image contours. The below figure shows the original and the corrupted image. Recovering contours via the classic model sometimes leads to the wrong result. Such problem cases are avoided by accounting for the thickness of contours and restoration via the geodesics in $\text{SIM}(2)$.



The extended model is also motivated by application to the problem of finding salient lines in images. The below figure illustrates finding blood vessels (salient lines) in the photograph of the human retina. Specifications: x, y are spatial coordinates, θ is the orientation, and $\kappa = e^\sigma$ is the thickness of lines.



STATEMENT OF THE PROBLEM

We formulate our contour completion model as the optimal control problem. Consider the following control system:

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 e^\sigma \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 e^\sigma \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_3, \\ \dot{\sigma} = u_4, \end{cases} \quad \begin{aligned} (x, y, \theta, \sigma) &= q \in \text{SIM}(2), \\ (u_1, u_3, u_4) &\in U, \\ U &= \{(u_1, u_3, u_4) \in \mathbb{R}^3 \mid u_1^2 + u_3^2 + u_4^2 \leq 1\}. \end{aligned}$$

For given boundary conditions $q_0, q_1 \in \text{SIM}(2)$, we aim to find the controls $u_1(t), u_3(t), u_4(t) \in L^\infty([0, T], \mathbb{R})$, such that the corresponding trajectory $q: [0, T] \rightarrow \text{SIM}(2)$ satisfies

$$q(0) = q_0, \quad q(T) = q_1, \quad T \rightarrow \min.$$

Due to invariance under $\text{SIM}(2)$ action we set $q_0 = (0, 0, 0)$.

EXISTENCE OF THE SOLUTION

The system is symmetric with respect to the controls and it satisfies Hormander condition. By Chow–Rashevsky theorem, these two conditions plus connectedness of $\text{SIM}(2)$ guarantee complete controllability. Existence of an optimal admissible trajectory is ensured by Filippov's theorem.

Theorem. A solution to the optimal control problems exists for any boundary condition.

PONTRYGIN MAXIMUM PRINCIPLE

Denote by X_i the left-invariant vector fields

$$\begin{aligned} X_1(q) &= e^\sigma \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \right), & X_3(q) &= \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ X_2(q) &= e^\sigma \left(-\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} \right), & X_4(q) &= \frac{\partial}{\partial \sigma}. \end{aligned}$$

Denote $h_i = \langle \lambda, X_i \rangle$, $\lambda \in T^* \text{SIM}(2)$. The Pontryagin function is

$$H_u = u_1 h_1 + u_3 h_3 + u_4 h_4.$$

The Hamiltonian system is given by

$$\begin{cases} \dot{x} = u_1 e^\sigma \cos \theta, \\ \dot{y} = u_1 e^\sigma \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u_3, \\ \dot{\sigma} = u_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = u_3 h_2 + u_4 h_1, \\ \dot{h}_2 = -u_3 h_1 + u_4 h_2, \\ \dot{h}_3 = -u_1 h_2, \\ \dot{h}_4 = -u_1 h_1. \end{cases}$$

PMP states that H_u is maximum $H = \max_{u \in U} H_u$ on optimal control.

ABNORMAL EXTREMALS $H = 0$

The Hamiltonian H is a first integral the Hamiltonian system. Without loss of generality there are two distinct cases $H = 0$ (abnormal case) and $H = 1$ (normal case).

Theorem. Abnormal optimal trajectories have the following form: $x(t) = y(t) = \theta(t) = 0$, $\sigma(t) = \pm t$.

NORMAL EXTREMALS $H = 1$

In the normal case we have $H = h_1^2 + h_2^2 + h_4^2 = 1$.

The Hamiltonian system takes the form

$$\begin{cases} \dot{x} = h_1 e^\sigma \cos \theta, \\ \dot{y} = h_1 e^\sigma \sin \theta, \\ \dot{\theta} = h_3, \\ \dot{\sigma} = h_4, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{h}_1 = h_3 h_2 + h_4 h_1, \\ \dot{h}_2 = -h_3 h_1 + h_4 h_2, \\ \dot{h}_3 = -h_1 h_2, \\ \dot{h}_4 = -h_1^2. \end{cases}$$

This system has the following independent first integrals:

$$H, \quad g_1 = e^{-\sigma} (h_1 \cos \theta - h_2 \sin \theta), \quad g_2 = e^{-\sigma} (h_2 \cos \theta + h_1 \sin \theta).$$

The question of Liouville integrability remains open.

Consider the Poisson bivector $P = (P_{ij})$ with the components $P_{ij} = \{h_i, h_j\}$. We have $\det P = (h_1^2 + h_2^2)^2$; thus $\text{rank } P = 0$ if $h_1^2 + h_2^2 = 0$, and $\text{rank } P = 4$ otherwise.

In the case $h_1^2 + h_2^2 = 0$, the coadjoint orbit is zero dimensional and we have the explicit expression for the extremals.

Theorem. For the initial covector values $h_{10} = h_{20} = 0$ normal extremal trajectories have the following form:

$$x(t) = y(t) = 0, \quad \theta(t) = h_{30} t, \quad \sigma(t) = h_{40} t.$$

They are optimal on a time interval $t \in [0, \frac{\pi}{h_{30}}]$, when $h_{30} \neq 0$; and up to infinity, when $h_{30} = 0$.

In the general case $h_1^2 + h_2^2 > 0$, the coadjoint orbit is four dimensional. We performed a qualitative analysis of the Hamiltonian system leading to the following theorem.

Theorem. Any solution to the vertical part corresponding to the initial covector $h_{10}^2 + h_{20}^2 > 0$, $h_{40} < 0$ has the following asymptotic behavior:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_1(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_2(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_3(t) = h_{31}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h_4(t) = h_{41}.$$

Note that the condition $h_{40} < 0$ is technical, and we use it in the proof. Based on the numerical experiments, we formulate the conjecture that the limiting behavior holds for all $h_{40} \in \mathbb{R}$.

MODELING OF ASSOCIATION FIELD

Psychophysicists investigated the problem of contour completion (integration) by the human visual system. Gestalt laws have been proposed for several phenomena of visual perception. Among them, the law of good continuation plays a central role in perceptual completion. The principle of good continuation has resulted in the notion of association field, which describes the set of possible subjective contours starting from a given initial configuration. The role of the scale in the contour integration process was also noticed.

We provide a simulation of the association field by sub-Riemannian geodesics in $\text{SIM}(2)$. A remarkable property of this model is that the further spatial propagation of the present geodesics does not appear with growing time, which corresponds to our conjecture. This gives a natural bound for the spatial distance between given boundary configurations.



We provide another simulation showing that the sub-Riemannian distance in $\text{SIM}(2)$ can be used as a criterion for perceptual grouping of the patterns with different positions, orientations, and sizes.



BIBLIOGRAPHY

- [0] Galyaev I., Mashtakov A., *A Cortical-Inspired Contour Completion Model Based on Contour Orientation and Thickness*, Journal of Imaging, 2024.
 [1] Koenderink J.J., *The structure of images*, Biological Cybernetics, 1984. [2] Hubel D.H., Wiesel T.N., *Receptive fields, binocular interaction and functional architecture in the cat's visual cortex*, J. Physiol., 1962. [3] Petitot J., *The neurogeometry of pinwheels as a sub-Riemannian contact structure*, J. Physiol., 2003. [4] Citti G., Sarti A., *A cortical based model of perceptual completion in the roto-translation space*, J. Math. Imaging Vis., 2006. [5] Sarti A., Citti G., Petitot J., *The symplectic structure of the primary visual cortex*, Biol. Cybern., 2008.

Геометрический метод решения линейных дифференциальных игр с многомерным фазовым вектором

Михайлов Антон, tigr-mav@yandex.ru

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского, УрО РАН, Екатеринбург

Школа-конференция «Неголономные дни в Переславле», Переславль-Залесский, 26–30 августа 2024 г.

Постановка задачи

Антагонистическая дифференциальная игра:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= A(t)z + B(t)u + C(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad z \in \mathbb{R}^n, \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ z(T) &\in M + MSpace^\perp. \end{aligned} \quad (1)$$

Эквивалентная игра

Заменой переменных переменных $x(t) = X_{1,2,\dots,d}(T,t)z(t)$, определяемой d строками фундаментальной матрицы Коши, соответствующими целевым компонентам фазового вектора, можно перейти от игры (1) к эквивалентной игре:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= D(t)u + E(t)v, \quad t \in [t_0, T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ D(t) &= X_{1,2,\dots,d}(T,t)B(t), \quad E(t) = X_{1,2,\dots,d}(T,t)C(t), \\ u &\in P \subset \mathbb{R}^p, \quad v \in Q \subset \mathbb{R}^q, \\ x(T) &\in M. \end{aligned} \quad (2)$$

Теоретическая процедура

Второй метод Понтрягина:

$$W(t_i) = (W(t_{i+1}) + (-\Delta)D(t_i)P) * \Delta E(t_i)Q, \quad W(t_N) = M, \quad (3)$$

$t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} = t_i + \Delta < \dots < t_N = T$.

«+» — сумма Минковского: $A + B = \{a + b \in \mathbb{R}^d \mid a \in A, b \in B\}$.

«*» — разность Минковского: $A * B = \{x \in \mathbb{R}^d \mid x + B \subset A\} = \bigcap_{b \in B} (A + (-b))$.

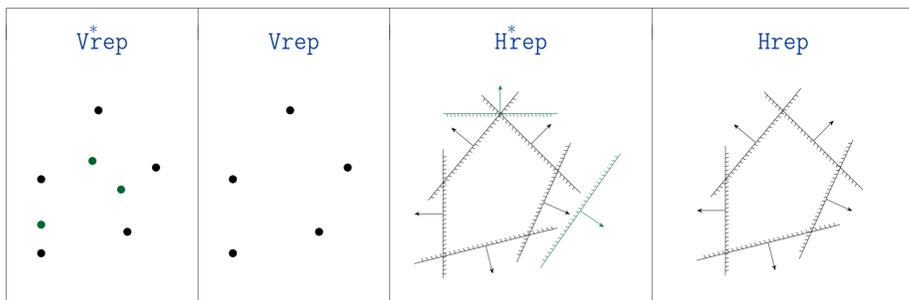
«conv» — выпуклая оболочка роя точек для получения многогранника $(-\Delta)D(t_i)P$.

Понтрягин Л.С., *Линейные дифференциальные игры, II* // Докл. АН СССР, 1967, Т. 75, № 4, С. 764–766.

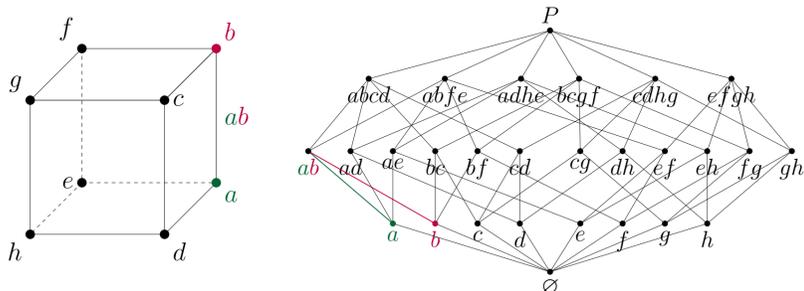
Реализации алгоритма

- Начало 1980-х, В.С. Пацко (ИММ УрО РАН): $d = 2$, точные алгоритмы.
- 1990-е, Н.Л. Григоренко (ВМК МГУ), Е.С. Половинкин (МФТИ): $d \geq 3$, приближённые алгоритмы.
- 1992, М.А. Зарх (ИММ УрО РАН): $d \geq 3$, точные алгоритмы, P, Q — зонотопы.
- 1992, Н.Д. Боткин (ИММ УрО РАН): $d \geq 3$, точные алгоритмы, **медленно**.

Представление выпуклого многогранника



FLrep; решётка граней



Существующие алгоритмы

- conv(V*rep A) → (Vrep A, Hrep A, FLrep A).
Swart Garret, *Finding the Convex Hull Facet by Facet* // Journal of Algorithms. 1985. Vol. 6. No. 1. pp. 17–48.
- sum(FLrep A, FLrep B) → FLrep C.
Das S., Dev S.R., Sarvottamananda S., *A Worst-Case Optimal Algorithm to Compute the Minkowski Sum of Convex Polytopes* // Algorithms and Discrete Applied Mathematics. CALDAM 2021. Lecture Notes in Computer Science (eds.: A. Mudgal, C.R. Subramanian), Vol. 12601. Cham: Springer, 2021. pp. 179–195.
- diff(Hrep A, Vrep B) → H*rep C.
Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А., *Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности* // Тр. Ин-та мат. и мех. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 128–134.
- H*rep A → Hrep A.
Fukuda Komei, *Polyhedral Computation*. Educational materials, Department of Mathematics, Institute of Theoretical Computer Science ETH Zurich, 2020. pp 145.
Боткин Н.Д., Рязанцева Е.А., *Алгоритм построения множества разрешимости в линейной дифференциальной игре высокой размерности* // Тр. Ин-та мат. и мех. Екатеринбург: УрО РАН, 1992. Т. 2. С. 128–134.

Предлагаемая вычислительная схема

doNextSection(FLrep W_{i-1} , FLrep P_i , V*rep Q_i) → FLrep W_i ,

$P_i = (-\Delta)D(t_i)P$, $Q_i = (-\Delta)E(t_i)Q$

По шагам:

- sum(FLrep W_{i-1} , FLrep P_i) → FLrep A_i
- FLrep A_i → Hrep A_i
- diff(Hrep A_i , Vrep Q_i) → H*rep W_i
- H*rep W_i → Vrep W_i
- conv(Vrep W_i) → FLrep W_i

Разработанные алгоритмы

FLrep A → Hrep A.

Для каждой $(d-1)$ -грани многогранника:

- Строим / берём аффинный базис $(d-1)$ -грани.
- Строим / берём строго внутреннюю точку многогранника.
- Вычисляем внешнюю нормаль. Используем численно устойчивый алгоритм QR-разложения на основе метода отражений.

H*rep A → Vrep A

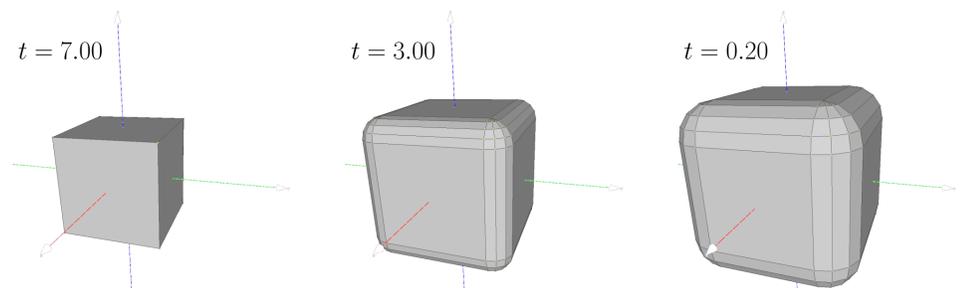
Предлагается геометрический алгоритм решения данной задачи:

- Находим какую-то вершину многогранника (перебор или задача ЛП);
- Строим лучи, содержащих одномерные рёбра;
- Вдоль каждого ребра находим соседнюю вершину;
- Ведём поиск по рёберному графу многогранника.

Примеры

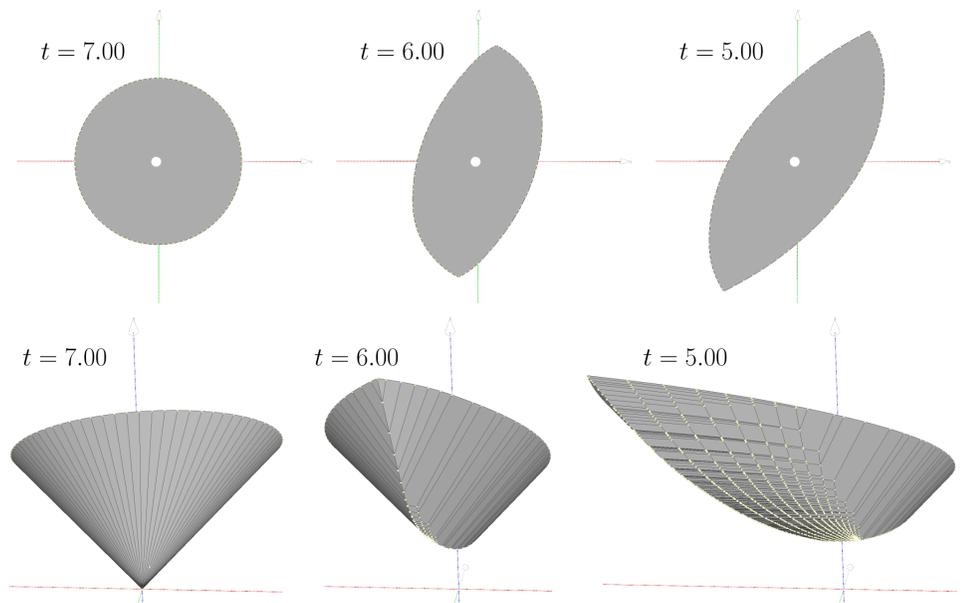
Простые движения

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u + v, \\ t \in [t_0, T] &= [0, 7], \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ u &\in \tilde{B}_2(0, 1), \quad v \in \tilde{B}_2(0, 0.9), \quad \text{— аппроксимации шаров} \\ M &= B_\infty(0, 1) \text{ — куб,} \\ \Delta &= 0.2. \end{aligned}$$



Материальная точка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 + v, \\ \dot{x}_2 &= u, \\ \dot{x}_3 &= 0 \text{ — значение функции платы,} \\ t \in [t_0, T] &= [0, 7], \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \quad \rightarrow \quad t \in [t_0, T] = [0, 7], \quad x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3, \\ u &\in [-1, 1], \quad v \in [-0.9, 0.9], \\ \varphi(x(T)) &= \|x(T)\| \rightarrow \min_u \max_v \\ (x_1(T), x_2(T), x_3(T))^T &\in M = \text{epi } \varphi \\ \bar{M} &= M \cap \{x_3 \leq 2\}, \quad \Delta = 0.1. \end{aligned}$$



КЛАССИФИКАЦИЯ ИНВАРИАНТНЫХ НОРМ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

МУСАЕВА АСИЯТ (МГУ)

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ: В.Ю. ПРОТАСОВ (L'AQUILA)

Непрерывной линейной системой с переключениями называется система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t), \\ x(0) = x_0, \\ A(t) \in \mathcal{A}, \quad t \in [0, \infty] \end{cases}$$

где функция $A(t) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{A}$ — измеримая функция с множеством значений \mathcal{A} (множество $(d \times d)$ -матриц, называемое **множеством управления**).

Следующая величина называется **показателем Ляпунова**

$$\sigma(\mathcal{A}) = \inf\{\alpha \mid \exists C \|x(t)\| \leq C \cdot e^{\alpha t}\},$$

где \inf берется по всем траекториям $x(t)$ и по всем значениям t .

Свойства показателя Ляпунова

- $\sigma(\mathcal{A}) = \sigma(\text{co}(\mathcal{A}))$
- $\sigma(\mathcal{A} + sI) = \sigma(\mathcal{A}) + s$

Теорема 1 (Н. Барабанов, 1989)

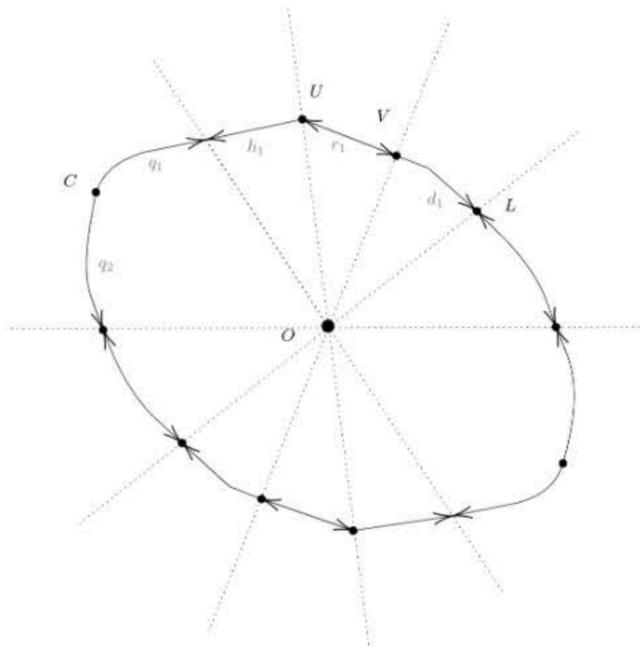
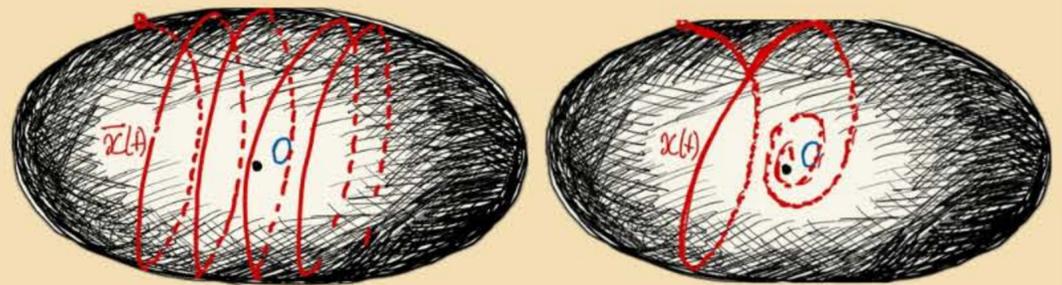
Пусть $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, где \mathcal{A} — неприводимое семейство матриц, тогда существует такая норма f :

1. для любой траектории $\bar{x}(t)$ функция $f(\bar{x}(t))$ неубывающая;
2. для любой точки x_0 существует траектория $\bar{x}(t)$ такая, что:

$$f(\bar{x}(t)) = \text{const}, \quad \text{для любого } t > 0$$

$$\bar{x}(0) = x_0$$

Такая норма называется **инвариантной нормой**.



Инвариантное тело разбивается на следующие непересекающиеся множества:

- Обратные открытые интервалы (множество R);
- Точки, принадлежащие ядрам операторов из \mathcal{A} и не лежащие на обратных интервалах (множество D);
- Множество точек, которые не относятся ни к обратным интервалам, ни к D (множество P). Это множество является открытым и, следовательно, является непересекающимся объединением открытых интервалов. Множество интервалов с единственной экстремальной траекторией обозначается как $H \subset P$. Пусть множество $Q = R \cup H$. Это множество конечное или счетное.

• Если система не имеет матрицы с действительным доминированием, то ее норма Барабанова единственна, а ее единичная сфера S совпадает с одним периодом некоторой периодической траектории системы $\mathcal{A} - \sigma I$.

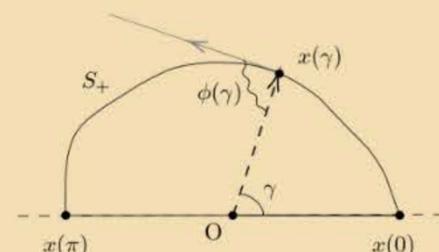
• Если система содержит матрицу с действительным доминированием, то норм Барабанова может быть бесконечно много. Единичная сфера нормы Барабанова никогда не описывается одной доминирующей траекторией. Каждая центрально-симметричная выпуклая кривая может быть единичной сферой нормы Барабанова подходящей системы с действительным доминированием.

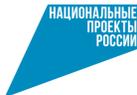
• Если система имеет матрицу W с комплексным доминированием, то ее норма Барабанова квадратична, единичная сфера представляет собой эллипс, задающийся траекторией матрицы $W - \sigma I$.

Теорема 2

Пусть \mathcal{A} семейство операторов в \mathbb{R}^2 с показателем Ляпунова $\sigma(\mathcal{A}) = 0$, а S — его инвариантное тело. Тогда для каждого $\gamma \in [0, \pi]$, которое является одним из элементов D или концом интервала из R, Q или P , выполнено

$$g(\gamma) = g(0) + \int_{[0, \gamma] \cap D} \cot \varphi(\tau) d\tau + \sum_{q_i \in Q, q_i \subseteq [0, \gamma]} \Delta(q_i) + \sum_{p_j \in P, p_j \subseteq [0, \gamma]} \Delta(p_j).$$





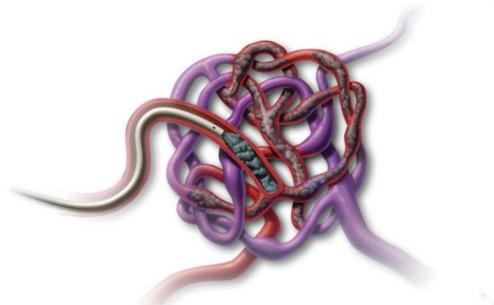
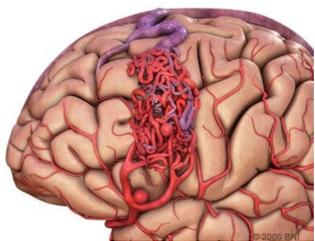
Анализ задачи эмболизации АВМ методами теории оптимального управления

И.А. Петренко¹, А.А. Черевко², Т.С. Шарифуллина²

¹Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)

²Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН (Новосибирск, Россия)

Предмет исследования

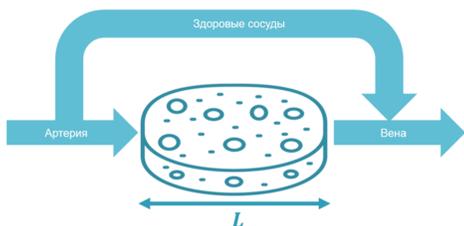


Артериовенозная мальформация (АВМ) – это церебральная сосудистая аномалия развития. Для нее характерно образование в некоторых участках головного мозга сосудистого клубка, состоящего из артерий и вен, соединяющихся друг с другом непосредственно, то есть без участия капиллярной сети.

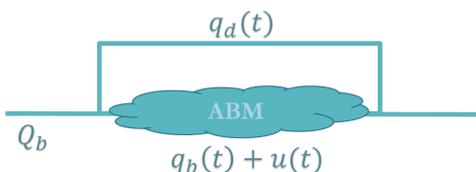
Эмболизация: В питающий АВМ сосуд вводятся специальные вещества, которые блокируют патологический кровоток. Это предотвращает опасность кровоизлияния при разрыве патологии и нормализует кровоснабжение окружающих тканей.

Задача исследования: Выработать рекомендации по режиму введения эмболического агента, обеспечивающие наибольшее заполнение патологии эмболическим агентом и способствующие уменьшению вероятности осложнений.

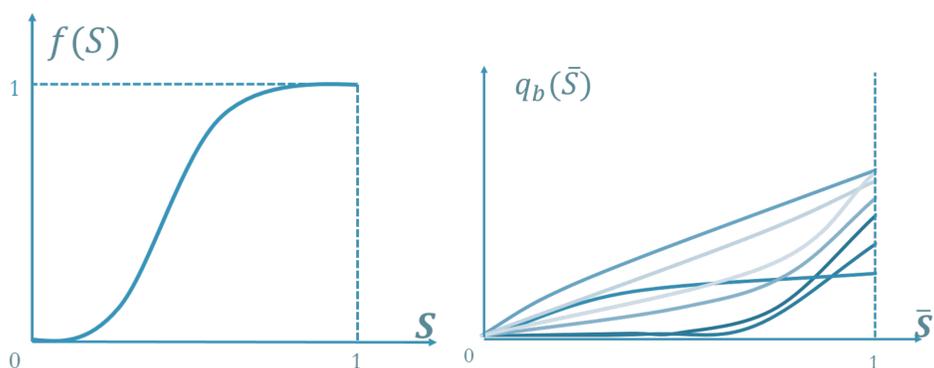
АВМ как пористое тело с перетоком. Одномерная модель



- $t \in [0, T]$ – время;
- $x \in [0, L]$ – координата вдоль АВМ (от входа артерии $x = 0$ до выхода на вену $x = L$);
- $S = S(t, x) \in [0, 1]$ – кровосодержание в момент времени t в поперечном сечении с координатой x ;
- $\bar{S} = \bar{S}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L S(t, x) dx \in [0, 1]$ – среднее кровосодержание в АВМ в момент времени t ;
- $p_{in} = p_{in}(t)$ – давление крови в артерии в момент времени t ;
- p_{out} – постоянное давление крови в вене;
- G – постоянная проводимость обводных здоровых сосудов;
- Q_b – постоянный суммарный расход крови, идущей через АВМ и обводные сосуды;
- $q_b = q_b(\bar{S}(t))$ – расход крови на входе в АВМ в момент времени t ;
- $q_d = q_d(t) = Q_b - q_b(t)$ – расход крови через обводные сосуды в момент времени t ;
- $u = u(t)$ – расход эмболического агента на входе в АВМ в момент времени t .



Клинические данные



$f(S)$ – типичная функция Баклея-Левретта, выражающая долю эмболического агента в общем потоке;

$q_b(\bar{S})$ – функция расхода крови.

Интегро-дифференциальная задача фильтрации

$$\frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0,$$

$$S(0, x) \equiv 1,$$

$$f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)}, \quad t \in (0, T],$$

$$\bar{S}(t) = \frac{1}{L} \int_0^L S(t, x) dx.$$

Ограничения и целевой функционал

Неотрицательность управления:

$$u(t) \geq 0.$$

Ограничение на совокупный расход фаз через патологию:

$$q_b(\bar{S}(t)) + u(t) \leq \bar{Q}.$$

Ограничение на входное давление:

$$p_{in}(t) = p_{out} + \frac{Q_b - q_b(\bar{S}(t))}{G} \leq p_{max},$$

или, что то же самое, $\bar{S} \geq \bar{S}_{min}$, где $\bar{S}_{min} = q_b^{-1}(Q_b - G(p_{max} - p_{out}))$.

Запрет на выход в вену:

$$S(t, L) = 1.$$

Цель – минимизировать долю крови в конце операции:

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx.$$

Формальная постановка задачи оптимального управления

$$J = \frac{1}{L} \int_0^L S(T, x) dx \rightarrow \min \begin{cases} 0 \leq u(t) \leq \bar{Q} - q_b(\bar{S}(t)), \\ \bar{S} \geq \bar{S}_{min}, \\ S(t, L) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial S(t, x)}{\partial t} + (q_b(\bar{S}(t)) + u(t)) \frac{\partial f(S(t, x))}{\partial x} = 0, & (t, x) \in [0, T] \times [0, L], \\ \frac{\partial S(t, x)}{\partial x} = \frac{S(t, x)}{L}, & x \in [0, L], \\ S(0, x) = 1, & x \in [0, L], \\ f(S(t, 0)) = \frac{q_b(\bar{S}(t))}{q_b(\bar{S}(t)) + u(t)}, & t \in [0, T], \\ \bar{S}(t, 0) = 0, & t \in [0, T]. \end{cases}$$

Оптимальный режим эмболизации

$$u^*(t) = \begin{cases} -V\bar{S}'(t) & t \in [0, T], \\ 0 & t \notin [0, T], \end{cases}$$

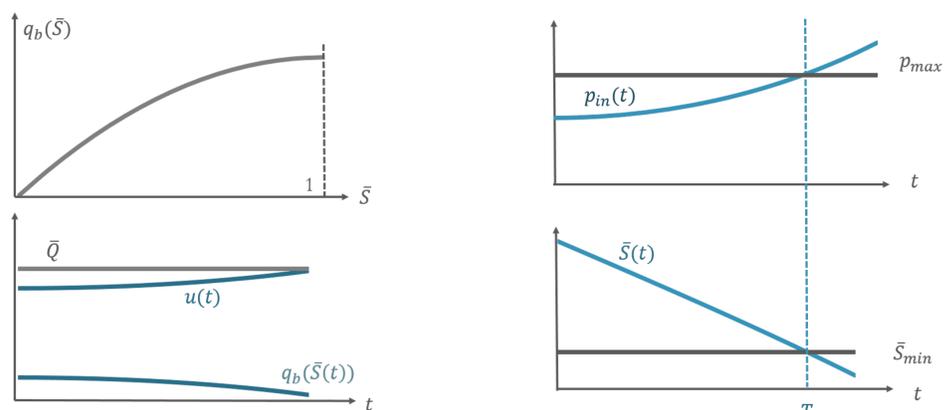
где V – полный объём АВМ, \bar{S} – решение начально-краевой задачи

$$\begin{cases} q_b(\bar{S}(t)) - V\bar{S}'(t) = \bar{Q}, \\ \bar{S}(0) = 1. \end{cases}$$

Терминальное ограничение:

$$T = \min_{t \in [0, \infty]} \{t : p_{in} = p_{max} \text{ или } S(t, L) < 1\}.$$

Пример



Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 22-11-00264).

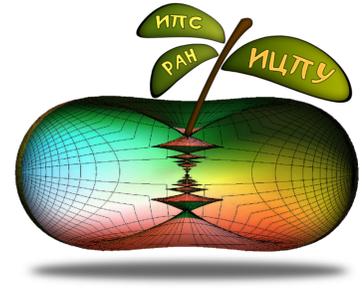
Экстремали левоинвариантных сублоренцевых структур

Условия сохранения каузального типа

Алексей Подобрыв

Институт программных систем им. А. К. Айламазяна РАН

alex@alex.botik.ru



Аннотация

В настоящей работе рассматриваются левоинвариантные (суб)лоренцевы структуры на группах Ли, заданные произвольным замкнутым выпуклым острым конусом в соответствующей алгебре Ли и ассоциированной с ним антинормой. Получены условия, при которых нормальные экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип. Кроме того, показано, что касательные векторы аномальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами некоторых субримановых аномальных экстремальных траекторий, которые определяются распределением плоскостей, порожденным конусом.

Введение

Последнее время вырос интерес к левоинвариантным лоренцевым и сублоренцевым задачам с точки зрения геометрической теории управления. Упомянем прежде всего пионерские в этом направлении работы М. Гроховского, посвященные сублоренцевой геометрии группы Гейзенберга. Это исследование было продолжено Ю. Л. Сачковым и Е. Ф. Сачковой. См. также работу Э. Гронга и А. Васильева о левоинвариантной сублоренцевой геометрии на пространстве антиде Ситтера и работы Ю. Л. Сачкова о левоинвариантной лоренцевой геометрии на плоскости Лобачевского.

Мы рассматриваем более общую постановку задачи, в которой левоинвариантная сублоренцева структура задана с помощью произвольного замкнутого выпуклого острого конуса в алгебре Ли и ассоциированной с ним непрерывной антинормы. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях нормальная экстремальная траектория сохраняет свой каузальный тип (т.е. ее касательный вектор всегда остается либо времениподобным, либо светоподобным). Кроме того, в отличие от римановой геометрии, аномальные экстремальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии. Эти аномальные траектории совпадают со светоподобными экстремальными траекториями, и тем самым, нестрого аномальны. В сублоренцевой геометрии, вообще говоря, аномальные экстремальные траектории могут иметь как светоподобные касательные векторы, так и касательные векторы, совпадающие с касательными векторами некоторых из субримановых аномальных траекторий, определяемых распределением плоскостей, которое линейно-порождено конусом. Если это распределение контактно, то аномальные экстремальные траектории светоподобны и нестрого аномальны.

Попутно оказывается, что для (суб)лоренцевых структур, заданных квадратичной формой, для описания экстремальных траекторий можно использовать квадратичный функционал «энергии», как и в субримановом случае. Заметим, что напрямую стандартный для субримановой геометрии трюк замены функционала длины на функционал энергии с использованием неравенства Коши-Буняковского-Шварца в (суб)лоренцевом случае не работает.

Результаты опубликованы в работе [1].

Постановка задачи

Пусть \mathcal{C} есть замкнутый выпуклый конус в конечномерном вещественном векторном пространстве V . Обозначим через $\text{int}\mathcal{C}$ и $\partial_r\mathcal{C}$ его относительные внутренность и границу, соответственно.

Определение 1. Антинормой, ассоциированной с конусом \mathcal{C} , называется функция $\alpha : V \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ такая, что

- (i) $\alpha|_{\text{int}\mathcal{C}} > 0$, $\alpha|_{\partial_r\mathcal{C}} = 0$, $\alpha|_{V \setminus \mathcal{C}} = -\infty$;
- (ii) для любых $v \in V$ и $\lambda > 0$ выполнено равенство $\alpha(\lambda v) = \lambda \alpha(v)$;
- (iii) для любых $v, w \in V$ выполнено $\alpha(v+w) \geq \alpha(v) + \alpha(w)$, т.е. функция α вогнута.

Будем называть антинорму α непрерывной, если функция $\alpha|_{\mathcal{C}}$ непрерывна.

Рассмотрим следующую левоинвариантную задачу оптимального управления на вещественной группе Ли G . Пусть $\mathcal{C} \subset \mathfrak{g}$ — замкнутый выпуклый конус в соответствующей алгебре Ли, а α — ассоциированная с ним непрерывная антинорма. Требуется найти липшицеву кривую $g : [0, t_1] \rightarrow G$ и управление $u \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C} \setminus \{0\})$ такие, что

$$g(0) = \text{id}, \quad g(t_1) = g_1, \quad \dot{g}(t) = L_{g(t)*}u(t), \quad \int_0^{t_1} \alpha(u(t)) dt \rightarrow \max, \quad (1)$$

где терминальное время t_1 свободно, а через L_g обозначен левый сдвиг на элемент $g \in G$.

Определение 2. Если касательный вектор $v \in T_gG$ таков, что $v \notin L_{g*}\mathcal{C}$ (или $v \in L_{g*}\partial_r\mathcal{C}$, или $v \in L_{g*}\text{int}\mathcal{C}$), то говорят, что он имеет пространственноподобный (или светоподобный, или времениподобный) каузальный тип.

Каузальным типом траектории $g : [0, t_1] \rightarrow G$ в точке $g(t)$ называется каузальный тип вектора $\dot{g}(t)$.

Рассмотрим семейство функций $H_u^\nu : T^*G \rightarrow \mathbb{R}$ на кокасательном расслоении группы G (зависящее от параметров $u \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ и $\nu \in \{0, 1\}$):

$$H_u^\nu(\lambda) = \langle L_{\pi(\lambda)}^* \lambda, u \rangle + \nu \alpha(u), \quad \lambda \in T^*G.$$

Определение 3. Липшицева кривая $\lambda : [0, t_1] \rightarrow T^*G$ называется экстремалью, существуют допустимое управление $\dot{u} \in L^\infty([0, t_1], \mathcal{C} \setminus \{0\})$ и число $\nu \in \{0, 1\}$ такие, что $(\lambda, \nu) \neq 0$ и для почти всех $t \in [0, t_1]$ выполнено

$$\dot{\lambda}(t) = \vec{H}_{\dot{u}(t)}^\nu(\lambda(t)), \quad H_{\dot{u}(t)}^\nu(\lambda(t)) = \max_{u \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} H_u^\nu(\lambda(t)), \quad H_{\dot{u}(t)}^\nu(\lambda(t)) = 0,$$

где через $\vec{H}_{\dot{u}(t)}^\nu$ обозначено гамильтоново векторное поле, соответствующее гамильтониану $H_{\dot{u}(t)}^\nu$ относительно канонической симплектической структуры на кокасательном расслоении T^*G .

Если $\nu = 1$ ($\nu = 0$), то кривая λ называется нормальной (соответственно, аномальной) экстремалью. Пусть $\pi : T^*G \rightarrow G$ — естественная проекция. Кривая $\pi \circ \lambda : [0, t_1] \rightarrow G$ называется нормальной/аномальной экстремальной траекторией. Аномальная экстремальная траектория строго аномальна, если она не является проекцией никакой нормальной экстремали.

Вопрос. При каких условиях экстремальные траектории сохраняют свой каузальный тип?

Основной результат

Напомним некоторые необходимые определения из выпуклого анализа. Всяду ниже V^* обозначает двойственное пространство векторного пространства V , а $\langle \cdot, \cdot \rangle$ каноническое спаривание ковекторов и векторов.

Определение 4. Конус $\mathcal{C}^V = \{p \in V^* \mid p|_{\mathcal{C}} \leq 0\} \subset V^*$ называется отрицательным двойственным конусом для конуса \mathcal{C} . Антисферой радиуса r антинормы α называется множество

$S_r = \{v \in V \mid \alpha(v) = r\}$. Двойственной функцией для функции α называется функция $\alpha^V : V^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ такая, что

$$\alpha^V(p) = - \sup_{v \in S_1} \langle p, v \rangle, \quad p \in V^*.$$

Определение 5. Конус называется острым, если он не содержит ненулевых подпространств.

В силу левоинвариантности можно считать, что функции $H_{\dot{u}(t)}^\nu$ определены на двойственном пространстве алгебры Ли \mathfrak{g}^* с координатами $h_1 = \langle \cdot, e_1 \rangle, \dots, h_m = \langle \cdot, e_m \rangle$, где e_1, \dots, e_m — некоторый базис пространства \mathfrak{g} . Тогда экстремаль $\lambda(t)$ определяется сопряженной подсистемой $\dot{h}_i(t) = \{H_{\dot{u}(t)}^\nu, h_i(t)\}$ на пространстве \mathfrak{g}^* , где $h(t) = (h_1(t), \dots, h_m(t)) = L_{\pi(\lambda(t))}^* \lambda(t)$, а $\{\cdot, \cdot\}$ есть стандартная пуассонова структура на пространстве \mathfrak{g}^* .

Для ковектора $p \in \mathfrak{g}^*$ введем обозначение $u_p = \arg \max_{u \in \mathcal{C} \setminus \{0\}} H_u^\nu(p)$. Вообще говоря, u_p определено неоднозначно. Ковектор $h(0) \in \mathfrak{g}^*$ и выбор значений управления $u(t) = u_{h(t)}$ однозначно определяют экстремаль $\lambda(t)$ с начальным условием $\lambda(0) = h(0)$.

Теорема 1. Рассмотрим задачу оптимального управления (1), заданную замкнутым выпуклым острым конусом \mathcal{C} и ассоциированной с ним непрерывной антинормой α такой, что функция α^V является антинормой, ассоциированной с конусом \mathcal{C}^V . Тогда всякая экстремальная траектория $g(\cdot)$ является решением уравнения $\dot{g}(t) = L_{g(t)*}u_{h(t)}$, где $\dot{h}_i(t) = \{H_{u_{h(t)}}^\nu, h_i(t)\}$ и $H_{u_{h(t)}}^\nu = \langle h(t), u_{h(t)} \rangle$.

(1) Если траектория нормальна, то выполнено одно из двух условий:

- (а) $h(t) \in S_1^V = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha^V(p) = 1\}$ для всех t и траектория времениподобна;
- (б) $h(t) \in S_0^V = \{p \in \mathfrak{g}^* \mid \alpha^V(p) = 0\}$ для всех t и траектория светоподобна.

(2) Касательные векторы аномальных экстремальных траекторий либо светоподобны, либо являются касательными векторами субримановых аномальных траекторий, которые определяются распределением подпространств $L_{g*}\text{span}\mathcal{C} \subset T_gG$. В частности, светоподобные дуги нестрого аномальны.

Контрпример

Рассмотрим группу Гейзенберга, ее алгебра Ли есть пространство \mathbb{R}^3 с координатами x, y, z .

Рассмотрим левоинвариантную сублоренцеву структуру, заданную следующими конусом и антинормой на нем:

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) \mid x, y \geq 0, z = 0\},$$

$$\alpha(x, y) = xy/(x+y), \quad x^2 + y^2 \neq 0.$$

Тогда функция α^V на двойственном конусе имеет вид:

$$\mathcal{C}^V = \{(h_1, h_2, h_3) \in (\mathbb{R}^3)^* \mid h_1, h_2 \leq 0\},$$

$$\alpha^V(h_1, h_2, h_3) = \left(\sqrt{|h_1|} + \sqrt{|h_2|} \right)^2.$$

Заметим, что $\alpha^V|_{\partial_r(\mathcal{C}^V)} \neq 0$, следовательно α^V не является антинормой и условие теоремы 1 не выполняется. Можно проверить, что сопряженная подсистема нормальной гамильтоновой системы задается формулой:

$$\begin{cases} \dot{h}_1 = -h_3 u_2, \\ \dot{h}_2 = h_3 u_1, \\ \dot{h}_3 = 0, \end{cases} \quad u_h = (u_1, u_2) = \begin{cases} \left(\sqrt{|h_2/h_1|} + 1, \sqrt{|h_1/h_2|} + 1 \right), & \text{если } h_1 h_2 \neq 0, \\ (a, 0), & \text{если } h_1 = 0, \\ (0, b), & \text{если } h_2 = 0, \end{cases}$$

где u_h есть управление, соответствующее ковектору $h = (h_1, h_2, h_3) \neq 0$, а числа $a, b > 0$. Легко показать, что на любой нормальной экстремальной траектории имеется не более двух переключений между времениподобным и светоподобным управлениями.

Некоторые следствия

Следствие 1. Пусть антинорма α задается квадратичной формой q сигнатуры $(1, r)$ на алгебре Ли \mathfrak{g} , т.е. $\alpha(u) = \sqrt{q(u)}$, где в некотором базисе $e_0, e_1, \dots, e_r, \dots, e_n$ алгебры Ли \mathfrak{g} имеем $q(u) = u_0^2 - u_1^2 - \dots - u_r^2$. Тогда нормальные экстремальные траектории задачи (1) геометрически совпадают с нормальными времениподобными или светоподобными экстремальными траекториями той же управляемой системы с квадратичным функционалом

$$\frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(u_0^2(t) - u_1^2(t) - \dots - u_r^2(t) \right) dt \rightarrow \max$$

с фиксированным терминальным временем t_1 и управлением $u \in L^\infty([0, t_1], \mathfrak{g} \setminus \{0\})$.

Следствие 2. В лоренцевом случае, т.е. при $\text{span}\mathcal{C} = \mathfrak{g}$, аномальные экстремальные траектории светоподобны, в частности, нестрого аномальны.

Тем самым аномальные траектории всегда возникают в лоренцевой геометрии, в отличие от римановой геометрии, где нет аномальных траекторий.

Определение 6. Распределение плоскостей Δ на трехмерном гладком многообразии M называется контактным, если существует 1-форма ω такая, что $\Delta_m = \text{Ker}\omega_m$ для любой точки $m \in M$ и $\omega \wedge d\omega \neq 0$.

Следствие 3. Если распределение плоскостей $L_{g*}\text{span}\mathcal{C}$ контактно, то все аномальные траектории сублоренцевой задачи (1) светоподобны и, в частности, нестрого аномальны.

Список литературы

- [1] А. В. Подобрыв. Сублоренцевы экстремали, заданные антинормой. Дифференциальные уравнения, 60(3):386–398, 2024.

Благодарности

Исследование выполнено в Институте программных систем им. А. К. Айламазяна Российской академии наук за счет гранта Российского научного фонда, № 22-21-00877 (<https://rscf.ru/project/22-21-00877/>).

Собственные подпространства дискретного преобразования Хартли

Автор: Романенко Иван Александрович

Матрица дискретного преобразования Хартли

Матрица дискретного преобразования Хартли (ДПХарт) порядка N :

$$X_N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & C_1 & C_2 & \dots & C_{N-1} \\ 1 & C_2 & C_4 & \dots & C_{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & C_{N-1} & C_{2(N-1)} & \dots & C_{(N-1)^2} \end{pmatrix},$$

где $C_n = C_n(N) = \cos \frac{2\pi n}{N} + \sin \frac{2\pi n}{N}$.

Матрица ДПХарт служит действительным аналогом матриц дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и Уолша (ДПУ). Причем матрица X_4 совпадает с матрицей ДПУ в нумерации Пэли.

Свойства матрицы дискретного преобразования Хартли

- 1) Матрица X_N симметрична по определению.
- 2) Коэффициенты $C_n(N)$ периодически с периодом N :

$$C_n = C_{n+N}.$$

- 3) Квадрат матрицы ДПХарт равен произведению порядка N на единичную матрицу E , т.е.

$$X_N^2 = N \cdot E.$$

Ортогональные проекторы на собственные подпространства дискретного преобразования Хартли

Матрица $J = \frac{1}{\sqrt{N}} X_N$ задает оператор инволюции: $J^2 = E$.

Относительно оператора инволюции J все пространство раскладывается в прямую сумму двух собственных подпространств $X = R_+ \oplus R_-$, отвечающих собственным числам 1 и -1. Ортогональные проекторы на эти подпространства

$$P_+ = \frac{1}{2}(E + J) \text{ и } P_- = \frac{1}{2}(E - J).$$

Значит, собственные числа оператора ДПХарт X_N есть \sqrt{N} и $-\sqrt{N}$.

Размерности собственных подпространств дискретного преобразования Хартли

Теорема 1:

Если размерность исходного пространства нечетная ($N=2n+1$), то

$$\dim R_+ = n + 1 \text{ и } \dim R_- = n.$$

Если $N=4n$, то

$$\dim R_+ = 2n + 1 \text{ и } \dim R_- = 2n - 1.$$

Если $N=4n+2$, то

$$\dim R_+ = \dim R_- = 2n + 1.$$

Кронекерова степень матрицы дискретного преобразования Хартли

Матрица ДПХарт в виде кронекеровой степени $-X_N^{\otimes n}$

Свойства кронекеровой степени матрицы ДПХарт:

симметричность матрицы $-(X_N^{\otimes n})^T = X_N^{\otimes n}$

ее ортогональность $-(X_N^{\otimes n})^2 = N^n \cdot E$

После нормировки $J = \frac{1}{N^{n/2}} X_N^{\otimes n}$ матрица становится матрицей инволюции, что влечет наличие двух собственных подпространств и вид операторов проектирования.

Теорема 2:

Для матрицы $X_N^{\otimes n}$ размерности собственных подпространств:

$\dim R_+ = \dim R_- + 1$, если N – нечетное;

$\dim R_+ = \dim R_-$, если $N = 4k + 2$;

$\dim R_+ = \frac{1}{2} N^n + 2^{n-1}$ и $\dim R_- = \frac{1}{2} N^n - 2^{n-1}$, если $N = 4k$.

Список литературы

1. Брейсуэлл Р. Преобразование Хартли. – М.: Мир, 1990. – 175 с.
2. Беспалов М.С., Скаляренко В.А. Дискретные функции Уолша и их приложения. Владимир: ВлГУ. 2014. -68 с.
3. Беспалов М.С. Дискретные и вероятностные модели. Владимир: ВлГУ. 2017. -84 с.
4. Виноградов И.М. Суммы Гаусса и приложения их к доказательству закона взаимности квадратичных вычетов // Чебышевский сборник. 2021. т. 22, вып. 4, с. 7 – 49.
5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. М.: Дрофа. 2004. – 640 с.

Ландшафт задачи максимизации наблюдаемых кубита на малых временах

Сафронов А.В.¹

¹Московский физико-технический институт

Введение

Рассмотрим динамику замкнутой двухуровневой квантовой системы под действием когерентного управления. Она описывается уравнением Шредингера:

$$i \frac{dU_t^f}{dt} = (H_0 + f(t)V)U_t^f, \quad U_{t=0}^f = I \quad (1)$$

Где $U_t^f \in SU(2)$ — оператор эволюции, описывающий эволюцию квантовой системы, H_0 — свободный гамильтониан и V — гамильтониан взаимодействия (т.е. H_0 и V — эрмитовы операторы в \mathbb{C}^2). Считается, что $[H_0, V] \neq 0$ для нетривиальности динамики. Когерентное управление задается функциями f из некоторого пространства управлений, например, $L_2(0, T)$, $L_1(0, T)$, $L_\infty(0, T)$ в зависимости от задачи.

Многие типичные задачи квантового управления можно сформулировать как задачу максимизации целевого функционала \mathcal{J} типа Майера при фиксированном времени T . Особый интерес составляет вопрос нахождения экстремумов следующих функционалов \mathcal{J} :

- $\mathcal{J}_{\psi_i \rightarrow \psi_f}(f) = P_{\psi_i \rightarrow \psi_f}(f) = |\langle \psi_f | U_T^f | \psi_i \rangle|^2 \rightarrow \max$ — задача максимизации вероятности перехода из начального чистого состояния $|\psi_i\rangle$ в конечное чистое состояние $|\psi_f\rangle$.
- $\mathcal{J}_A(f) = \langle A \rangle_T^f = \text{tr}[U_T^f \rho_0 U_T^{f\dagger} A] \rightarrow \max$ — задача максимизации квантовой наблюдаемой A (задается эрмитовым оператором, т.е. $A^\dagger = A$).
- $\mathcal{J}_W(f) = \frac{1}{N^2} |\text{tr}(W^\dagger U_T^f)|^2 \rightarrow \max$ — задача генерации квантового вентиля $W \in SU(N)$.

В нашем случае будет решаться задача максимизации функционала квантовой наблюдаемой $\mathcal{J}_A(f)$.

Ловушкой задачи квантового управления называется локальный, но не глобальный максимум (или минимум) целевого функционала.

Динамический ландшафт управления — график целевого функционала $\mathcal{J}: L_2(0, T) \rightarrow \mathbb{R}$.

Кинематический ландшафт управления — график функции $J: SU(2) \rightarrow \mathbb{R}$.

Главной задачей теории квантового управления является нахождение оптимального управления, на котором функционал $\mathcal{J}(f)$ достигает максимума. Для этого обращаются к численным методам. Основная проблема такого подхода заключается в том, что для задач с большим числом параметров важно иметь алгоритм, работающий оптимально по времени. Для этого используют алгоритмы локального поиска, однако они чувствительны к локальным экстремумам, поэтому для решения задач важно понимать, как устроен ландшафт функционала и есть ли на нем ловушки.

Ниже приведены примеры ландшафтов с отсутствием [1] и наличием ловушек [2].

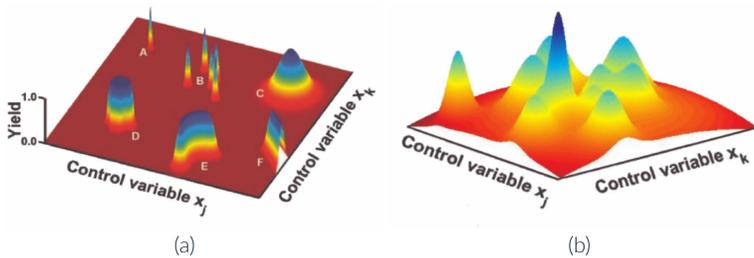


Рис. 1. Примеры ландшафтов задачи квантового управления

Было доказано [3], что никакое управление, кроме постоянного

$$f_0 := \frac{-(\text{tr}V \text{tr}H_0 + 2\text{tr}(H_0V))}{(\text{tr}V)^2 + 2\text{tr}(V^2)} \quad (2)$$

не может являться ловушкой. Было найдено критическое время

$$T_0 := \pi / \|H_0 - (1/2) \text{tr} H_0 + f_0 V\| \quad (3)$$

такое, что для времен больше T_0 доказано отсутствие ловушек для функционала квантовой наблюдаемой.

Параметризация

При условиях $\text{tr}(H_0V) \neq 0$ и $\text{tr}(V) = 0$ задача поиска ловушек для общего случая уравнения Шредингера сводится с помощью унитарного преобразования и перемасштабирования времени к задаче поиска ловушек для уравнения Шредингера следующего вида:

$$i \frac{dU_t^f}{dt} = [\sigma_z + (\sigma_x v_x + \sigma_y v_y) f(t)] U_t^f, \quad U_0^f = \mathbb{I}, \quad (4)$$

где

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

— матрицы Паули. Ниже $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ — вектор матриц Паули.

При таких условиях особое управление (2) принимает вид $f_0 = 0$, а критическое время $T_0 = \pi$.

Следуя работе [4], используем параметризацию $\mathbf{v}, \mathbf{r}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$, где

$$V = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad \rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad A = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}),$$

$$\mathbf{a} = (a_x, a_y, 0) = (\cos(\zeta), \sin(\zeta), 0), \quad \mathbf{r} = (r_x, r_y, 0), \quad \mathbf{v} = (v_x, v_y, 0) = (v \cos(\phi), v \sin(\phi), 0).$$

Введем обозначения

$$\Phi := (\mathbf{v} \times \mathbf{r})_z (\mathbf{v} \times \mathbf{a})_z = (v_x r_y - v_y r_x)(v_x a_y - v_y a_x)$$

$$\Psi := (\mathbf{r} \times \mathbf{a})_z = r_x a_y - r_y a_x.$$

$$\mathcal{D}_I = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi > 0, \Phi > 0\},$$

$$\mathcal{D}_{II} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi > 0, \Phi < 0\},$$

$$\mathcal{D}_{III} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi < 0, \Phi < 0\},$$

$$\mathcal{D}_{IV} = \{(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) | \mathbf{a}_z = \mathbf{r}_z = \mathbf{v}_z = 0, \Psi < 0, \Phi > 0\}.$$

В работе [4] было доказано, что при значениях параметров $(\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{v}) \in \mathcal{D}_{II}, \mathcal{D}_{IV}$ особое управление f_0 является седловой точкой при любом времени $T > 0$. Нам будет интересен случай времен $T < T_0$ в областях параметров \mathcal{D}_I и \mathcal{D}_{II} , где должны существовать ловушки, согласно [3].

Импульсное управление и соответствующий ему оператор эволюции

Любую матрицу $U \in SU(2)$ можно разложить в углы Эйлера:

$$U = e^{-i\sigma_z \gamma/2} e^{-i\sigma_x \beta/2} e^{-i\sigma_z \alpha/2}.$$

Для системы с гамильтонианом типа Ландау-Зинера было показано [5], что управление, переводящее начальное состояние $|\psi_{in}\rangle$ в конечное $|\psi_{fin}\rangle$ за минимальное время T_{min} , имеет вид "импульс-ожидание-импульс", тогда оператор эволюции, соответствующий этому управлению, выглядит следующим образом:

$$U_H(T) = e^{-i\alpha f \sigma_z} e^{-i\omega T \sigma_x} e^{-i\alpha_{in} \sigma_z}. \quad (6)$$

Это послужило мотивацией для выбора в нашей работе оператора эволюции вида

$$U(\alpha, \beta, \gamma) = e^{-i\alpha(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y)} e^{-i\beta \sigma_z} e^{-i\gamma(v_x \sigma_x + v_y \sigma_y)}, \quad \alpha, \gamma \in [0, 2\pi/v), \quad \beta \in [0, T].$$

Будем считать $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1$.

Рассмотрим задачу поиска экстремума функционала $\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \text{tr}(U(\alpha, \beta, \gamma) \rho_0 U^\dagger(\alpha, \beta, \gamma) A)$ на многообразии

$$\Pi_0(T) = \mathbb{S}^1 \times [0, T] \times \mathbb{S}^1. \quad (7)$$

Формулы для градиенты

Были вычислены формулы градиент и гессиан функционала квантовой наблюдаемой $\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma)$. Ниже приведены формулы для градиента.

$$\mathcal{J}'_\alpha = \sin(\zeta - \phi) [\sin(2\alpha) \cos(2\beta) \cos(2\gamma) (r_x \sin(\phi) - r_y \cos(\phi)) - \sin(2\alpha) \sin(2\beta) (r_x \cos(\phi) + r_y \sin(\phi)) + \cos(2\alpha) \sin(2\gamma) (r_x \sin(\phi) - r_y \cos(\phi))],$$

$$\mathcal{J}'_\beta = -\cos(2\gamma) (r_y \cos(\phi) - r_x \sin(\phi)) \times (\cos(2\alpha) \sin(2\beta) \sin(\zeta - \phi) + \cos(2\beta) \cos(\zeta - \phi)) - ((r_x \cos(\phi) + r_y \sin(\phi)) \times (\sin(2\beta) \cos(\zeta - \phi) - \cos(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(\zeta - \phi))),$$

$$\mathcal{J}'_\gamma = (r_y \cos(\phi) - r_x \sin(\phi)) (\sin(2\beta) \sin(2\gamma) \cos(\zeta - \phi) - \sin(\zeta - \phi) (\cos(2\alpha) \cos(2\beta) \sin(2\gamma) + \sin(2\alpha) \cos(2\gamma))).$$

Отсутствие ловушек для примера из области \mathcal{D}_I

Рассмотрим частный набор параметров в области \mathcal{D}_I , где могут существовать ловушки при $f \in L_1[0, T]$:

$$\{r_x = 0, r_y = 1, \phi = 0, \zeta = 3\pi/4\} \in \mathcal{D}_I. \quad (8)$$

При таком выборе параметров квантовая наблюдаемая, начальное состояние и гамильтониан взаимодействия выглядят следующим образом:

$$A = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{2}\mathbb{I} - \sigma_x + \sigma_y), \quad \rho_0 = \frac{1}{2}(\mathbb{I} + \sigma_y), \quad V = \sigma_x. \quad (9)$$

Функционал квантовой наблюдаемой при данном выборе параметров принимает вид:

$$\mathcal{J}(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{4} [\sqrt{2} \cos(2\gamma) (\cos(2\alpha) \cos(2\beta) + \sin(2\beta)) - \sqrt{2} \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) + 2]. \quad (10)$$

Теорема 1. Точка $(0, T, 0) \in \Pi_0$ при $T \in (0, \pi/8)$, соответствующая нулевому управлению с временем ожидания T , является точкой глобального максимума целевого функционала \mathcal{J} на многообразии $\Pi_0(T)$, т.е. не является ловушкой.

Замечание. Наличие системы, описываемой параметрами из области \mathcal{D}_I , такой, что в ней отсутствуют ловушки, говорит о противоречии с ранее известными результатами [4] о том, что все системы из \mathcal{D}_I должны обладать ловушками.

Динамический ландшафт

Визуальное подтверждение Теоремы 1 можно наблюдать на следующих графиках динамического ландшафта функционала квантовой наблюдаемой (10) при различных значениях времени T .

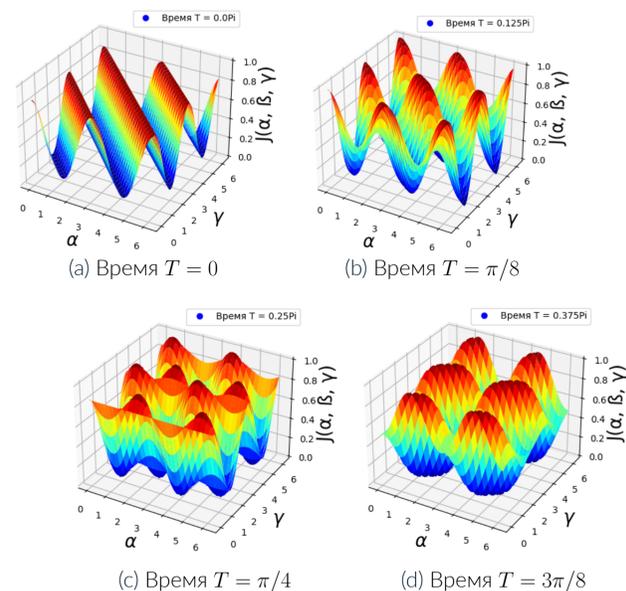


Рис. 2. Кинематические ландшафты для целевого функционала квантовой наблюдаемой $\mathcal{J}(\alpha, T, \gamma)$ системы (8) при временах $T = 0, \pi/8, \pi/4, 3\pi/8$

Список литературы

- H. Rabitz, M. Hsieh, and C. Rosenthal, "Quantum optimally controlled transition landscapes," *Science*, vol. 303, no. 5666, pp. 1998–2001, 2004.
- A. Pechen and D. Tannor, "Are there traps in quantum control landscapes?" *Phys. Rev. Lett.*, vol. 106, no. 12, 2011. 120402.
- A. Pechen and N. Il'in, "Coherent control of a qubit is trap-free," *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 285, no. 1, pp. 233–240, 2014.
- A. Pechen and N. Il'in, "Control landscape for ultrafast manipulation by a qubit," *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, vol. 50, p. 075301, jan 2017.
- G. Hegerfeldt, "Driving at the quantum speed limit: optimal control of a two-level system," *Phys. Rev. Lett.*, vol. 111, no. 26, 2017. Article no. 075301.



Аннотация

Исследуется задача об оптимальных траекториях машины Дубинса в классе траекторий, состоящих из прямолинейных отрезков и дуг окружностей максимально допустимой кривизны. Описано множество достижимости и оптимальные траектории для некоторых граничных условий.

Введение

Машина Дубинса моделируется единичным вектором на плоскости. Вектор может перемещаться в произвольную точку (x, y) на плоскости и поворачиваться на произвольный угол $\theta \in [0, 2\pi)$. Таким образом, состояние системы есть тройка $q = (x, y, \theta)$, где $x, y \in \mathbb{R}^2$, а $\theta \in [0, 2\pi)$. Будем считать, что начальное состояние машины есть $q_0 = (0, 0, 0)$. Машина может совершать следующие движения:

1. Прямолинейное движение вперед по направлению θ
2. Движение по окружности радиуса 1 по часовой стрелке или против часовой стрелки

В связи с этим, естественным образом возникают задачи для исследования, решения которых представлены далее.

Сразу введем удобные обозначения: движение по часовой стрелке R , против L , а движение по прямой - S .

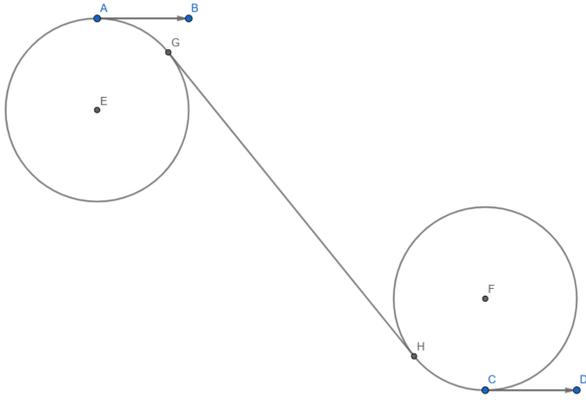
Задача 1

Для начала хотелось бы найти множество достижимости нашей машины, то есть понять, в какие состояния $q = (x, y, \theta)$ может переместиться машина из начального состояния q_0 .

Из начального состояния машина может переместиться в любое. Достаточно понять, как реализуется поворот на месте на некоторый угол и параллельный перенос.

Параллельный перенос реализуется, например, так:

Если AB - начальное положение, а CD - конечное, то

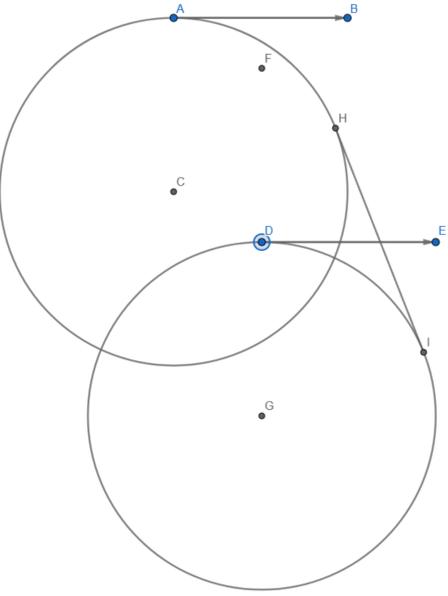


из начального положения мы можем выйти по окружности с центром E , а в конечном можем прийти по окружности с центром F .

Соединим эти окружности отрезком касательной GH .

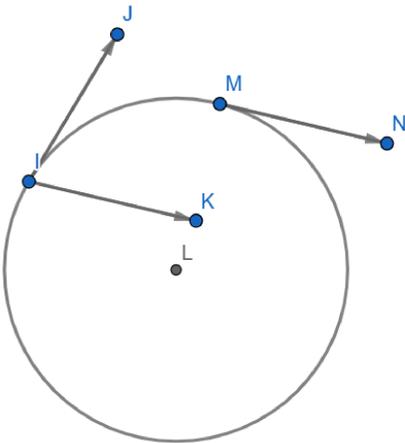
Таким образом, придя из начального положения в точку G , затем пройдя по прямой H и придя в конечном положении (RS), мы реализуем параллельный перенос.

Может так случиться, что начальная и конечная точки близки, то есть окружности пересекаются.



Но и в этом случае без проблем реализуется, например, траектория $AHID - RSR$, где HI - отрезок касательной между двумя окружностями.

С поворотом тоже всё просто:



Если IJ - начальное положение, а IK - конечное, то двинемся по окружности направо до положения MN - когда вектор станет параллелен конечному.

И теперь нам остается совершить параллельный перенос, который мы уже умеем делать.

Задача 2

Теперь перед нами стоит задача найти оптимальное движение машины, т.е. движение по кратчайшей кривой $(x(t), y(t))$, в случае, когда расстояние между начальной точкой (x_0, y_0) и конечной точкой (x_1, y_1) больше 6.

Существование оптимальной траектории следует из теоремы Филиппова. Пусть γ - кратчайшая кривая.

По теореме 4.5 из [1], оптимальные траектории могут быть одного из следующих двух типов:

1. Конкатенация дуги окружности единичного радиуса, прямолинейного отрезка и дуги окружности единичного радиуса
2. Конкатенация не более чем трех дуг окружностей единичного радиуса

Будем обозначать эти типы соответственно (1) и (2).

Таким образом, γ имеет тип (1) или (2).

Но γ не может иметь тип (2), так как окружности у нас единичного радиуса, а в этом случае по одной дуге машина может пройти расстояние не большее, чем 2, а значит для не более чем 3х дуг окружностей это расстояние будет не более, чем 6, что противоречит условию.

Таким образом, γ имеет тип (1).

Вспомним, как мы строили траекторию когда искали множество достижимости. Нетрудно понять, что так построенная траектория имеет тип (1). Более того, аналогичным образом можно построить 8 траекторий (поскольку между согласованными окружностями 4 касательных, а пар таких окружностей 2)

Геометрически мы можем выбрать из этих 8 траекторий самую короткую или несколько самых коротких. Обозначим это семейство α .

Утверждается, что $l_\alpha = l_\gamma$.

Действительно, поскольку γ оптимальна, то $l_\gamma \leq l_\alpha$.

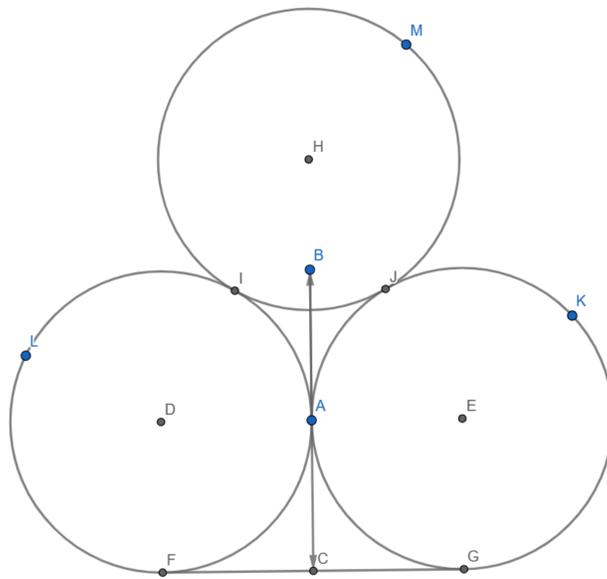
С другой стороны, так как γ имеет тип (1), то она попадет в одну из 8-ми наших траекторий, а среди этих 8-ми мы выбирали α кратчайшей, то есть $l_\alpha \leq l_\gamma$.

Таким образом, $l_\alpha = l_\gamma$.

Задача 3

Теперь мы хотим найти оптимальный разворот машины, т.е. движение по кратчайшей кривой $(x(t), y(t))$ в случае $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$, $(x_1, y_1, \theta_1) = (0, 0, \pi)$.

Для поворота есть две траектории:



Пусть AB - начальное положение, а AC - конечное.

Траектория $AJKGFLIA$, которая в терминах нашего движения будет RSR , будет иметь тип (1).

Траектория $AJMIA$, которая в терминах нашего движения будет RLR , будет иметь тип (2) (окружность с центром — это окружность, которая касается двух наших окружностей допустимого движения).

Обозначим α - траекторию 1-го типа, а через β - построенную траекторию 2-го типа.

Пусть γ - оптимальная траектория для поворота. Она существует по следствию из теоремы Филиппова. По теореме 4.5 она имеет тип (1) или (2). Если бы γ имела тип (1), то аналогично тому, как мы искали оптимальное движение в случае расстояния большего чем 6, можем заключить, что она бы совпала с α .

Но геометрически мы знаем, что α длиннее β , так что таким образом, γ имеет тип (2).

Покажем, что γ совпадает с β .

В конечном положении мы можем попасть двумя способами: двигаясь по "левой" окружности направо, и по "правой" налево.

Ограничимся рассмотрением "левой" окружности.

Задача 3 (продолжение)

Поскольку у нас тип (2), то наше движение будет иметь вид RLR (движения должны чередоваться, потому что иначе они бы склеивались в одну дугу).

Таким образом мы видим, что из начального положения мы должны повернуть направо.

Наше движение происходит по трем дугам, так что когда мы меняем направление, мы по сути переходим на касающиеся окружности.

Так что видим, что в нашей стратегии, окружность, по которой мы движемся влево, касается как "правой", так и "левой".

Ну а такая конфигурация совпадает с β .

Задача 4

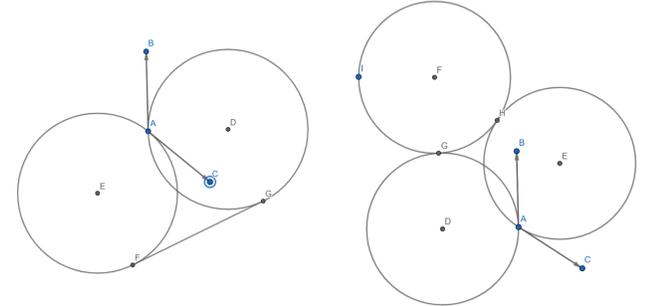
А что если мы хотим повернуть на произвольный угол?

Найти оптимальное движение машины в случае $(x_0, y_0, \theta_0) = (0, 0, 0)$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$, $\theta_1 \in (0, \pi)$

В общем-то тоже самое.

Построим две траектории - α и β - 1-го и 2-го типа соответственно.

Если AB - начальное положение, а AC - конечное, то траектория α будет иметь вид $AGFA - RSR$ (см. левый рис.).



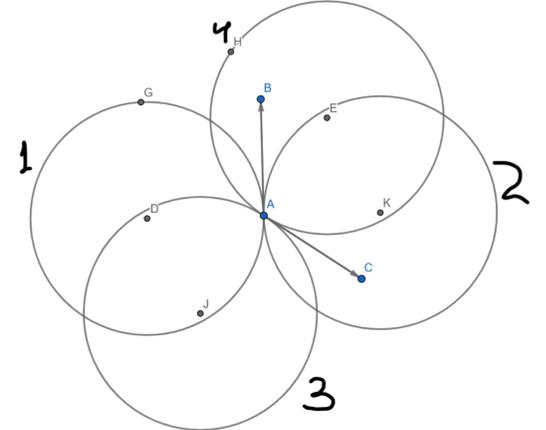
Траектория β будет иметь вид $AGIHA - RLR$ (см. правый рис.).

Геометрически показывается, что β короче α .

Итак, мы рассматриваем поворот на угол θ направо. Пусть γ - оптимальная траектория. Если бы она имела тип (1), то как мы знаем из предыдущих задач, она бы совпала с α . Значит, γ имеет тип (2)

Покажем, что в таком случае она совпадает с β .

В положение AC можно попасть из двух окружностей, обозначим их как 3 и 4. А окружности, по которым мы входим - 1 и 2.



Поскольку у нас тип (2), то некоторые комбинации окружностей отпадают:

Выйдя по 1, мы будем двигаться L , а чтобы зайти по 3 нам надо двигаться R . Но между ними должна быть ещё одна дуга, где машина меняет направление, а такое невозможно.

Аналогично, выйдя по 2, мы не сможем зайти по 4.

Выйдя по 2 мы могли бы перейти на 3 с помощью касающейся окружности, но тогда переход бы происходил по дуге, а у нас уже есть такой переход с помощью типа (1), который происходит по отрезку. А длина дуги больше, чем длина отрезка, а значит такой переход и подавно больше нашего.

Остается выход по 1 с переходом на 4 - наша искомая траектория.

Библиография

- [1] Сачков Ю. Л., Левинвариантные задачи оптимального управления на группах Ли: классификации и задачи, интегрируемые в элементарных функциях, УМН, 2022, том 77, выпуск 1(463), 109-176.
- [2] Марков А. А., Несколько примеров решения особого рода задач о наибольших и наименьших величинах, Сообщ. Харьков. матем. общ. 2-я сер., 1:2 (1889), с. 250-276.
- [3] Dubins L.E., On curves of minimal length with a constraint on average curvature, and with prescribed initial and terminal positions and tangents, Amer. J. Math. 1957. V. 79. No. 3. P. 497-516.
- [4] Laumond J.-P., Nonholonomic motion planning for mobile robots. Tutorial notes., LAAS-CNRS. Toulouse. 1998.

Задача о кратчайших на диэдре

М. С. Федосеев

ООО «Научно-исследовательский институт космических и авиационных материалов», Переславль-Залесский

Рассматривается задача поиска кратчайших линий между двумя точками, расположенными на вырожденной призме D (диэдр), состоящей из двух (плоских) выпуклых многоугольников. Если точки расположены на одном многоугольнике, то решение есть прямая. Для граничных точек, расположенных на противоположных многоугольниках, решение представляется в виде ломаной, проходящей через некоторое общее ребро. Описаны граничные положения точек, при которых возникает больше одного решения. В общем случае алгоритм построения кратчайшей линии сведен к решению системы линейных уравнений и неравенств.

Постановка задачи

Пусть на плоскости задан следующий выпуклый многоугольник (быть может неограниченный):

$$P_+ = \{(x, y) \mid f_i(x, y) > 0, i = 1, \dots, n\}, \quad (1)$$

где n есть число ребер, а линейные функции f_i последовательно определяют каждое из ребер многоугольника.

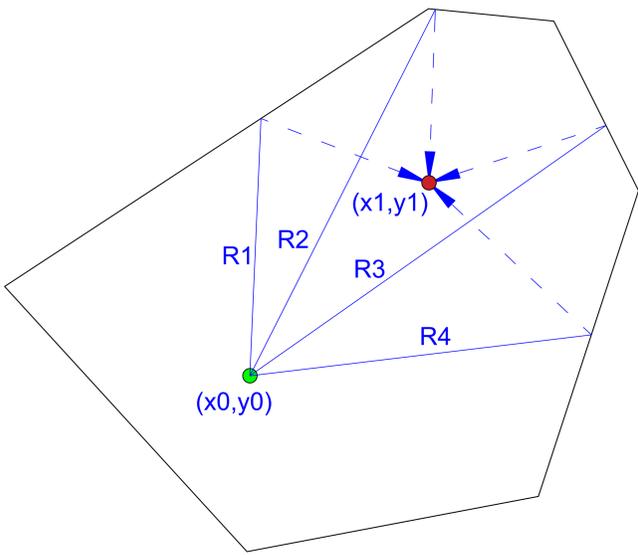
Множество $P_- = P_+$ определяет противоположную грань вырожденной призмы, а $P_0 = \partial P_+ = \partial P_-$ есть граница обеих граней. Таким образом, определяется диэдр

$$D = P_+ \cup P_- \cup P_0. \quad (2)$$

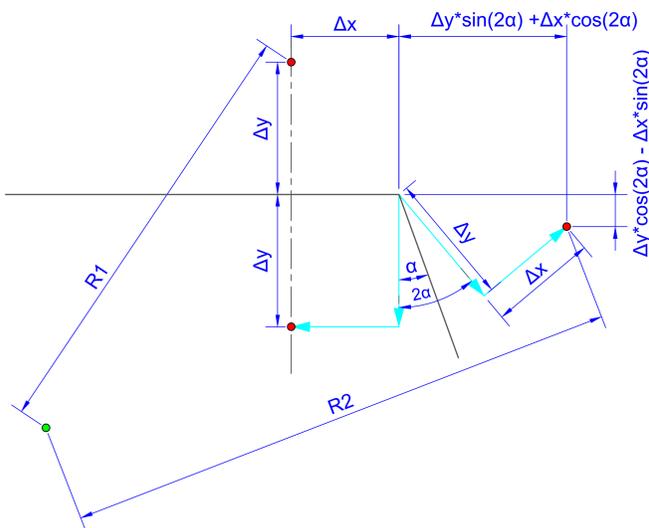
Далее, рассмотрим точки на противоположных гранях

$$(x_0, y_0) \in P_+, \quad (x_1, y_1) \in P_-. \quad (3)$$

Требуется построить кратчайшую линию соединяющую начальную точку (x_0, y_0) с конечной (x_1, y_1) .



Решение для двух ребер (n = 2)



Зафиксируем начальную точку (x_0, y_0) и найдем множество точек (x_1, y_1) , для которых $R_1 = R_2$, т.е. существуют две кратчайших. Для этого нужно найти соотношение Δx , Δy при $R_1 = R_2$.

Составим для них уравнения

$$R_1 = \left((x - \Delta x)^2 + (y - \Delta y)^2 \right)^{1/2}, \quad (4)$$

$$R_2 = \left((x + \Delta y * \sin(2\alpha) + \Delta x * \cos(2\alpha))^2 + (y + \Delta x * \sin(2\alpha) - \Delta y * \cos(2\alpha))^2 \right)^{1/2}. \quad (5)$$

Приравняем R_1 , R_2 и найдем следующее соотношение:

$$\Delta y = \Delta x \frac{x \cos \alpha + y \sin \alpha}{y \cos \alpha - x \sin \alpha}. \quad (6)$$

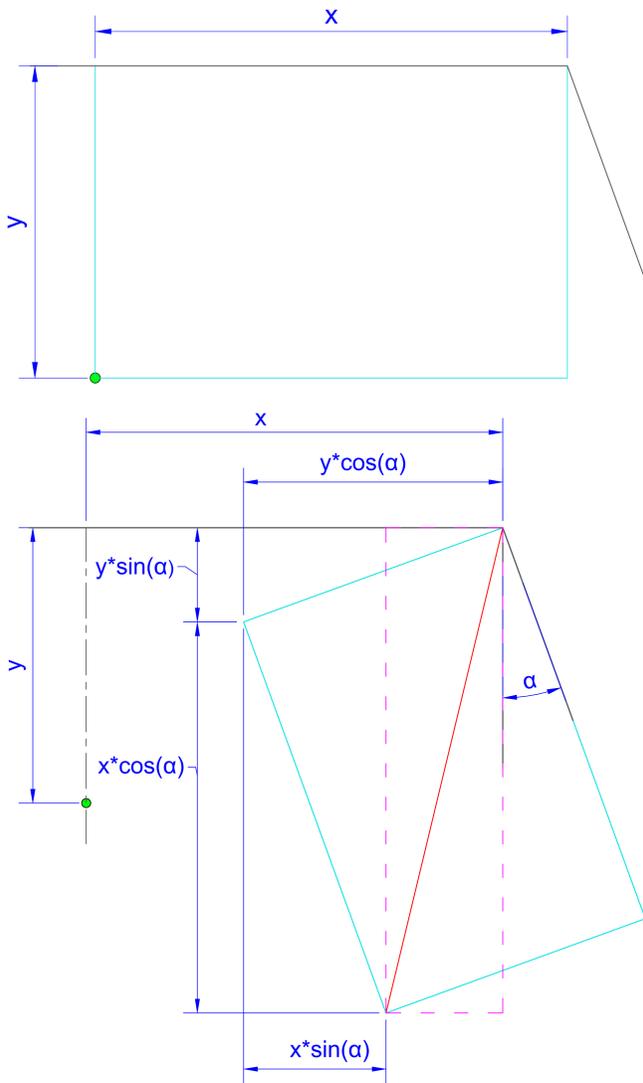
Заключение

В результате получен алгоритм, который делит множество конечных точек P_- на два подмножества для каждой пары ребер. В одном из подмножеств содержатся конечные точки, кратчайшие траектории к которым проходят через одно ребро, а в другом подмножестве содержатся конечные точки, кратчайшие траектории к которым пересекают другое ребро. Таким образом, решение сведено к нахождению множества P_i для каждого i -ого ребра. Это делаем путём отсеечения от множества P_- других подмножеств, содержащих в себе конечные точки, кратчайшие к которым ведут не через данное ребро.

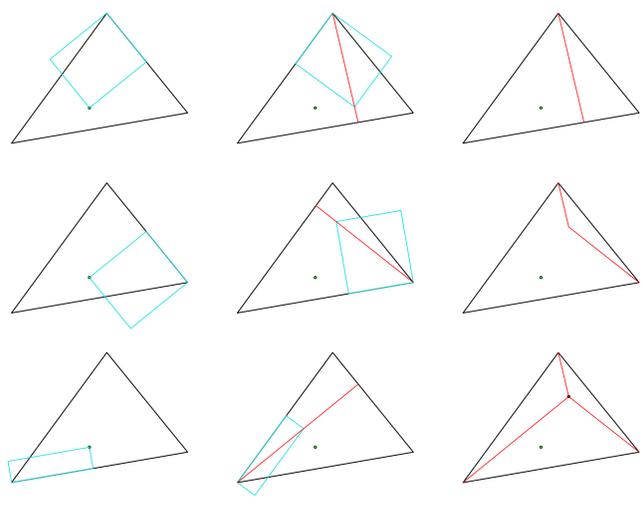
Геометрический смысл множества Максвелла для угла

Определение

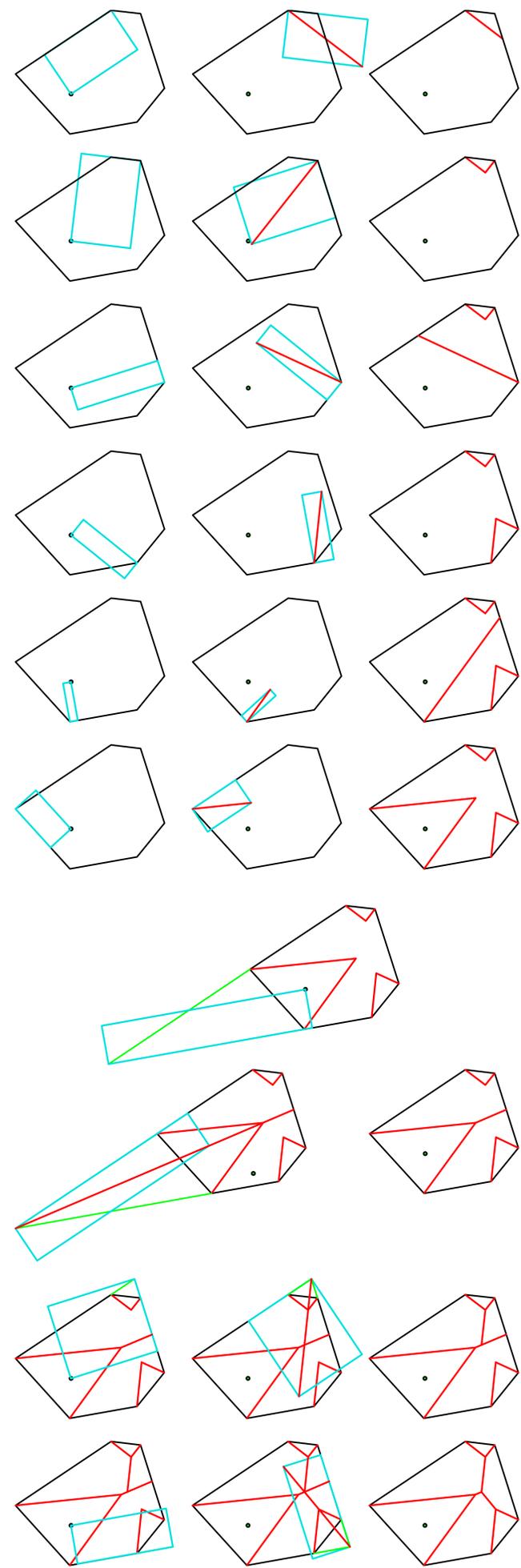
Множество Максвелла для фиксированной начальной точки (x_0, y_0) есть множество конечных точек (x_1, y_1) , для которых существует несколько решений (кратчайших траекторий).



Пример построения множества Максвелла для треугольника



Пример построения множества Максвелла для шестиугольника





Об оптимальном периодическом сборе возобновляемого ресурса

А.В. Черникова

Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых (Владимир, Россия)
nastik.e@bk.ru

Введение

Как известно, многие виды животных имеют сезонный характер размножения. В этой связи представляет интерес исследование динамических режимов таких популяций [1]. При промышленном воздействии актуальной является задача описания режимов промысла, при которых сохраняется часть популяции и достигается наибольшее значение дохода, в том числе в долгосрочной перспективе [2, 3]. Настоящая работа является продолжением публикаций [4, 5], в которых положено начало исследований различных характеристик сбора возобновляемого ресурса. Здесь описан периодический режим сбора ресурса, при котором средняя временная выгода достигает наибольшего значения.

Определение характеристик сбора

Рассмотрим структурированную популяцию, разделенную на $n \geq 2$ видов или возрастных классов (при $n = 1$ назовем популяцию однородной, то есть состоящей из одного вида). Обозначим через $x_i(k)$, $i = 1, \dots, n$ численность популяции i -го вида или возрастного класса в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$. При отсутствии эксплуатации динамика $x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k))$ задана системой разностных уравнений

$$x(k+1) = F(k, x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $F(k, x) = (F_1(k, x), \dots, F_n(k, x))$, $F_i(k, x)$ — вещественные непрерывные функции на $\mathbb{R}_+^n \doteq \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}$.

Предполагаем, что в моменты времени $k = 1, 2, \dots$ популяция подвержена промышленному воздействию $u(k) = (u_1(k), \dots, u_n(k)) \in [0, 1]^n$. Рассмотрим множество $U \doteq \{\bar{u} : \bar{u} = (u(1), \dots, u(k), \dots)\}$ и исследуем задачу выбора управлений $\bar{u} \in U$, доставляющих определенный результат сбора. Таким образом, исследуем модель популяции, подверженной промыслу, динамика которой определяется системой

$$X(k+1) = F(k, (1 - u(k))X(k)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $X_i(k)$ и $(1 - u_i(k))X_i(k)$ — количество ресурса i -го вида до и после сбора в момент k соответственно, $i = 1, \dots, n$, $(1 - u(k))X(k) = ((1 - u_1(k))X_1(k), \dots, (1 - u_n(k))X_n(k))$. Отметим, что $X(1) = f(x(0))$.

Иследуем характеристику сбора возобновляемого ресурса — среднюю временную выгоду, которая определена функцией

$$H_*(\bar{u}, x(0)) \doteq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n C_i X_i(j) u_i(j),$$

где $C_i \geq 0$ — агрегированная стоимость условной единицы i -го вида. Если существует указанный предел, то среднюю временную выгоду будем обозначать $H(\bar{u}, x(0))$.

Пусть функции $F_i(j, x)$, $i = 1, \dots, n$ периодические с периодом $\tau \geq 2$. Исследуем периодический режим сбора ресурса $u_i(j)$, $i = 1, \dots, n$ с периодом τ (в случае, когда $\tau = 1$ режим является стационарным). Рассмотрим множество $U(\tau) \subset U$ периодических управлений с периодом τ , при которых уравнение (1) имеет периодическое решение с тем же периодом.

Пусть $x = (x(1), \dots, x(\tau)) \in \mathbb{R}_+^{n\tau}$. Рассмотрим функцию

$$D(x) = \frac{1}{\tau} \sum_{j=1}^{\tau} \sum_{i=1}^n C_i (F_i(j, x(j)) - x_i(j))$$

и множество

$$G \doteq \{x \in \mathbb{R}_+^{n\tau} : x(1) \leq F(\tau, x(\tau)) \neq 0; x(k) \leq F(k-1, x(k-1)) \neq 0, k = 2, \dots, \tau\}.$$

Теорема

Предположим, что функция $D(x)$ достигает наибольшего значения $D(x^*)$ в точке $x^* \in G$. Тогда для любых $\bar{u} \in U(\tau)$, $x(0) \in \mathbb{R}_+^n$ выполнено неравенство

$$H(\bar{u}, x(0)) \leq H(\bar{u}^*, x^*(0)) = D(x^*),$$

при следующих периодических управлениях $\bar{u}^* \in U(\tau)$:

$$u^*(1) = 1 - \frac{x^*(1)}{F(\tau, x^*(\tau))}, \quad u^*(k) = 1 - \frac{x^*(k)}{F(k-1, x^*(k-1))}, \quad k = 2, \dots, \tau$$

(здесь $x^*(0)$ таково, что $F(x^*(0)) = x^*(1)$).

Примеры

Пример 1. Найдем оптимальные режимы промысла однородной популяции, динамика которой задана дискретным логистическим уравнением

$$x(k+1) = a(k)x(k)(1 - x(k)), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $x \in [0, 1]$ — численность популяции, $a(k) > 0$ — коэффициент собственной скорости роста. Предполагаем, что коэффициент $a(k)$ периодический с периодом 2, например, $a(k) = 1.5$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $a(k) = 3$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Тогда развитие однородной популяции можно описать периодическими функциями

$$F(1, x(1)) = 1.5x(1)(1 - x(1)) \quad \text{и} \quad F(2, x(2)) = 3x(2)(1 - x(2)).$$

Без ограничения общности будем считать, что агрегированная стоимость условной единицы однородной популяции равна $C = 1$. Функция

$$D(x(1), x(2)) = \frac{1}{2} (F(1, x(1)) - x(1) + F(2, x(2)) - x(2)) = \\ = 0.25x(1)(1 - 3x(1)) + x(2)(1 - 1.5x(2))$$

достигает наибольшего значения $\frac{1}{6}$ на множестве G при $x^*(1) = \frac{1}{3}$, $x^*(2) = \frac{1}{3}$ и управлениях $u^*(1) = 0.5$, $u^*(2) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим двухвозрастную популяцию, динамика которой описана системой

$$\begin{cases} x_1(k+1) = b(k)x_1(k) + x_1(k)x_2(k) - 2x_1^2(k), \\ x_2(k+1) = 4x_2(k) + \frac{1}{4}x_1(k)x_2(k) - 3x_2^2(k), \end{cases}$$

где $x_1(k) \in [0, 1]$ и $x_2(k) \in [0, 1]$ — численность младшего и старшего возрастного класса соответственно в момент времени $k = 0, 1, 2, \dots$, $b(k) > 0$ — периодический (с периодом 2) коэффициент собственной скорости роста младшего возрастного класса. Пусть $b(k) = 2$ для любого $k \in \{0, 2, 4, \dots\}$ и $b(k) = 4$ для любого $k \in \{1, 3, 5, \dots\}$. Развитие двухвозрастной популяции можно описать периодическими функциями $F(1) = (F_1(1, x(1)), F_2(1, x(1)))$ и $F(2) = (F_1(2, x(2)), F_2(2, x(2)))$, где $x(1) = (x_1(1), x_2(1))$, $x(2) = (x_1(2), x_2(2))$,

$$F_1(1, x(1)) = 2x_1(1) + x_1(1)x_2(1) - 2x_1^2(1), \quad F_1(2, x(2)) = 4x_1(2) + x_1(2)x_2(2) - 2x_1^2(2), \\ F_2(1, x(1)) = 4x_2(1) + \frac{1}{4}x_1(1)x_2(1) - 3x_2^2(1), \quad F_2(2, x(2)) = 4x_2(2) + \frac{1}{4}x_1(2)x_2(2) - 3x_2^2(2).$$

Пусть $C_1 = 2$, $C_2 = 4$. Функция

$$D(x(1), x(2)) = x_1(1)(1 - 2x_1(1)) + 6x_2(1)(1 - x_2(1)) + x_1(2)(3 - 2x_1(2)) + \\ + 6x_2(2)(1 - x_2(2)) + \frac{3}{2}x_1(1)x_2(1) + \frac{3}{2}x_1(2)x_2(2)$$

достигает наибольшего значения, приближенно равного 5.1867, на множестве G при $x_1^*(1) \approx 0.4590$, $x_2^*(1) \approx 0.5574$, $x_1^*(2) \approx 0.8115$, $x_2^*(2) \approx 0.6229$ и управлениях $u_1^*(1) \approx 0.8243$, $u_2^*(1) \approx 0.1746$, $u_1^*(2) \approx 0.2233$, $u_2^*(2) \approx 0.1519$.

Результаты исследования получены совместно с профессором кафедры функционального анализа и его приложений Владимирского государственного университета им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, д.ф.-м.н. Л.И. Родиной.

Литература

- [1] Шлюфман К.В., Фрисман Е.Я., Неверова Г.П. Динамические режимы модели Рикера с периодически изменяющимся мальтузианским параметром // *Нелинейная динамика*, **13:3** (2017), 363-380.
- [2] Belyakov A.O., Veliov V.M. On optimal harvesting in age-structured populations // *Dynamic Perspectives on Managerial Decision Making: Essays in Honor of Richard F. Hartl*, **22** (2016), 149-166.
- [3] Давыдов А.А., Мельник Д.А. Оптимальные состояния распределенных эксплуатируемых популяций с периодическим импульсным отбором // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **27:2** (2021), 99-107.
- [4] Егорова А.В., Родина Л.И. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса из структурированной популяции // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, **29:4** (2019), 501-517.
- [5] Родина Л.И., Черникова А.В. Об оптимальной добыче возобновляемого ресурса на бесконечном промежутке времени // *Труды Института математики и механики УрО РАН*, **29:1** (2023), 167-179.